1 Gütekriterien numerischer Verfahren

Im Text habe ich keine Hinweise zur Güte des Eulerverfahrens gemacht; deshalb will ich hier einige Bemerkungen dazu machen. Grundsätzlich spielen folgende Faktoren bei der Beurteilung numerischer Verfahren eine Rolle:

- Modellierung
- Kondition
- Stabilität
- Konsistenz
- Konvergenz

2 Modellierung

Bei der Modellbildung oder Modellierung eines Lösungsverfahrens kommt es darauf an, wie passend das Verfahren die Wirklichkeit beschreibt. Ein gutes Beispiel ist die im Text erwähnte Verbesserung der exponentiellen Wachstumsgleichung durch die logistische Gleichung, die Verhulst vorgeschlagen hat. Wie bei jeder naturwissenschaftlichen Untersuchung, muss das Modell durch Experimente und Messungen untermauert werden. Dies hat Verhulst in seiner Arbeit von 1845 erfolgreich durchgeführt.

3 Kondition

Für die weitere Betrachtung sei mit F das Verfahren bezeichnet, mit dem das Modell beschrieben wird und mit X unabhängige Eingabeparameter, wie Anfangswerte, Randbedingungen oder andere Parameter des Verfahrens. Die Kondition des Verfahrens sagt etwas über die Abhängigkeit von F unter Änderungen von X aus oder anders: wenn man wenig an X wackelt, dann sollte auch F sich nur wenig ändern. Man formuliert das über die Differenz $\|F(X) - F(x)\|$, wobei x für geringfügig gegenüber X gestörte Eingabeparameter steht. Die Kondition ist eine Eigenschaft des durch F beschriebenen Problems.

4 Stabilität

Stabilität ist eine ähnliche Eigenschaft, die sich aber auf das numerische Verfahren, wir nennen es f, zur Lösung oder Approximation von F bei gestörten Eingabedaten (das können auch Rundungsfehler bei der numerischen Berechnung sein) bezieht: $\|F(x) - f(x)\|$, mit anderen Worten, f soll auch bei gestörten Eingabedaten x das Verfahren F noch hinreichend gut approximieren.
Kondition und Stabilität beeinflussen die Güte $\|F(X) - f(x)\|$ des Verfahrens F. Über die Dreiecksungleichung und eine nahrhafte Null läßt sich abschätzen:

$$\|F(X) - f(x)\| \leq \|F(X) - F(x)\| + \|F(x) - f(x)\| \tag{1}$$

Für die Darstellung der weiteren zwei oben genannten Eigenschaften nehmen wir nun etwas spezieller an, dass, wie in unserem Beispiel der kontinuierlichen logistischen Gleichung, das Lösungsverfahren zur näherungsweisen Berechnung der kontinuierlichen Lösung durch Diskretisierung einer Differentialgleichung entsteht. Sei dazu F die exakte Lösung eines kontinuierlichen Problems, f_h die Lösung der diskretisierten Aufgabe zur Schrittweite h.

5 Konsistenz

Zur Definition der Konsistenz eines Lösungsverfahrens vergleicht man nun die Abweichung von exakter Lösung zur Lösung der diskretisierten Aufgabe für einen Rechenchritt von x_n nach x_{n+1} (um genau zu sein, wird die relative Zuwachsrate bzgl. F mit der bzgl. f_h verglichen). Man spricht bei dieser Differenz dann von dem lokalen Diskretisierungsfehler. Um ein Maß für die Güte der Diskretisierung zu haben, führt man die sog. Konsistenzordnung ein. Dazu definiert man:
Ein Verfahren hat die Konsistenzordnung $p \in \mathbb{N}$, wenn die Differenz der relativen Zuwachsraten von der Ordnung $O(h^p)$ ist.
Das verwendete explizite Eulerverfahren ist konsistent und hat die Konsistenzordnung 1.[1]

[1] Im Text wird eine Fehlerabschätzung für die Differenz aus kontinuierlicher Lösung und diskretisierter Lösung angegeben. Dort geht h in den Fehler quadratisch ein, die Konsistenzordnung des Eulerverfahrens ist aber 1.

6 Konvergenz

Es bleibt der Begriff der Konvergenz des Verfahrens. Hier wird man erwarten, dass die dikretisierte Näherungslösung f_h die kontinuierliche Lösung F überall, also nicht nur an den Diskretisierungspunkten x_n beliebig genau approximiert sondern auch dazwischen, wenn man nur h klein genug macht. Nun ist aber f_h nur an den Diskretisierungspunkten x_n definiert und so kann man nicht einfach $F(x) - f_h(x)$ bilden, wenn x nicht zufällig ein x_n ist. Statt dessen betrachtet man einen beliebigen Zielpunkt x, an dem man die kontinuierliche Lösung F(x) und die Näherungslösung $f_h(x)$ vergleicht, wenn man beginnend beim Anfangswert (x_0, y_0) die Näherungslösungen mit der Schrittweite $h_n = \frac{x-x_0}{n}$ berechnet; dann trifft x genau auf einen x_n-Wert.
Auch hier definiert man eine Konvergenzordnung; für das explizite Eulerverfahren beträgt sie ebenfalls 1.