1 Praktische Ergebnisse zur n-Periodizität und Attraktion

Im Text habe ich zwei entscheidende Gleichungen für das Verhalten des Orbits $\{b_i\}$ einer Iteration angegeben:

- $\exists n \in \mathbb{N}, x^* \in [a,b]\ g^n(x^*) = x^*$ für die n-Periodizität und
- $|(g^n)'(x^*)| < 1$ für die Attraktoreigenschaft

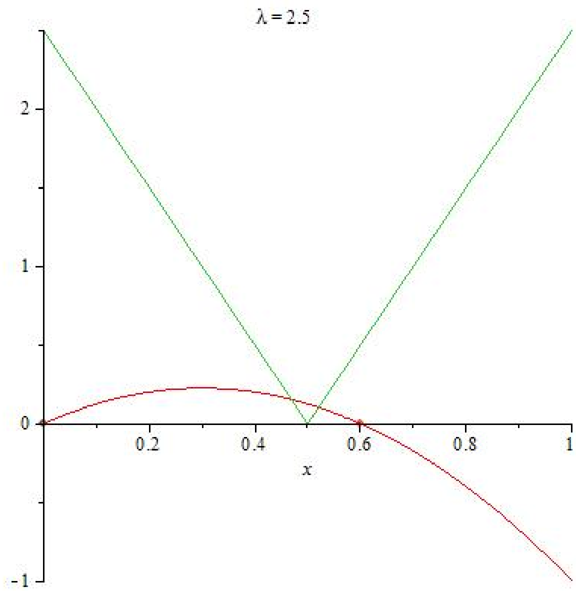
Es sei daran erinnert, dass mit g^n die n-fache Hintereinanderausführung von g gemeint ist. Die Untersuchung der beiden obigen Gleichungen für wachsendes n ist nur bis n = 2 ohne numerische Hilfsmittel möglich. Ich habe die folgenden Ergebnisse mit Hilfe des Computeralgebraprogrammes Maple erstellt.

$$\text{Sei } g(x) = \lambda x(1-x).$$

Fall n = 1:

- 1-Periodizität $g(x) = x \Leftrightarrow \lambda x(1-x) = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, somit $x_{1,1} = 0$ und $x_{1,2} = \frac{\lambda-1}{\lambda}$
- Attraktion $|g'(x)| = |\lambda(1-2x)| < 1$. Für $x_{1,1} : |\lambda| < 1$, für $x_{1,2} :$ $|2-\lambda| < 1 \Leftrightarrow 1 < \lambda < 3,$ bei positivem λ.

In folgender Grafik ist für $\lambda = 2.5$ in roter Farbe g(x) - x gezeichnet und in Grün $|g'(x)|$. Der 1-periodische Punkt (=Fixpunkt zu diesem λ) ist in Rot dargestellt, die andere Nullstelle von $g(x) = x$ in Schwarz.



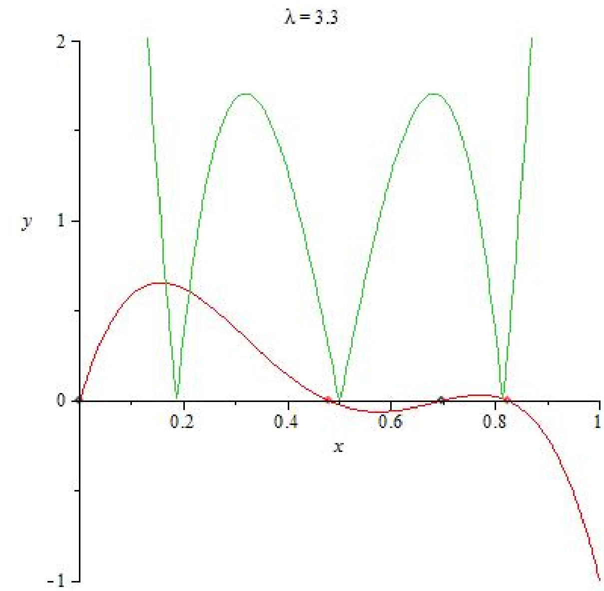
Die Steigung von g(x) am linken Rand des λ-Intervalls (also bei $\lambda = 1$) im Fixpunkt ist 1, am rechten Rand (also bei $\lambda = 3$) ist -1. Eine animierte Gif-Datei mit dem Namen log_Dgl_g.gif zeigt das Aussehen von g(x) - x und $g'(x)$ für λ-Werte zwischen 1 und 3.

Fall n = 2:

- 2-Periodizität $g^2(x) = x \Leftrightarrow \lambda^2 x(1-x)(1-\lambda x(1-x)) = x$
  mit den Lösungen $x_{2,1} = 0, x_{2,2} = \frac{\lambda-1}{\lambda}, x_{2,3} = \frac{1+\lambda+\sqrt{\lambda^2-2\lambda-3}}{2\lambda}$ und $x_{2,4} = \frac{1+\lambda-\sqrt{\lambda^2-2\lambda-3}}{2\lambda}$
  Die Lösungen 1 und 2 sind die der 1-Periodizität (klar, dass sie bei g(g(x)) = x wieder auftauchen).

- Attraktion $(g^2)'(x) = \lambda^2 - 2\lambda^2(1+\lambda)x + 6\lambda^3x^2 - 4\lambda^3x^3$
  Setzt man nun die Lösungen 3 und 4 in $(g^2)'(x)$ ein, erhält man in beiden Fällen $4 + 2\lambda - \lambda^2$ als Ergebnis; kein Wunder aufgrund des im Satz 2, Anhang (3) bewiesenen Ergebnisses über die Steigungen.
  Löst man nun die Ungleichung $|4 + 2\lambda - \lambda^2| < 1$, so ergibt sich als Intervall $\lambda \in (3, 1+\sqrt{6})$.

In folgender Grafik ist für $\lambda = 3.3$ in roter Farbe $g^2(x) - x$ gezeichnet und in Grün $|(g^2)'(x)|$. Auch hier wieder sind die 2-periodischen Punkte in Rot gezeichnet.



Die Steigung von $g^2(x)$ am linken λ-Intervallrand in Periodizitätspunkten ist 1, am rechten Rand ist sie -1.
Eine animierte Gif-Datei mit dem Namen log_Dgl_g2.gif zeigt das Aussehen von g(x) - x und $g'(x)$ für λ-Werte zwischen 3 und $1 + \sqrt(6)$.

Eigentlich müsste jetzt der Fall n = 3 untersucht werden. Er liegt aber, wie wir sehen werden an einer anderen Stelle; er wird aber nicht vergessen und statt dessen am Ende dieser Untersuchungen nachgeholt.
Fall n = 4:

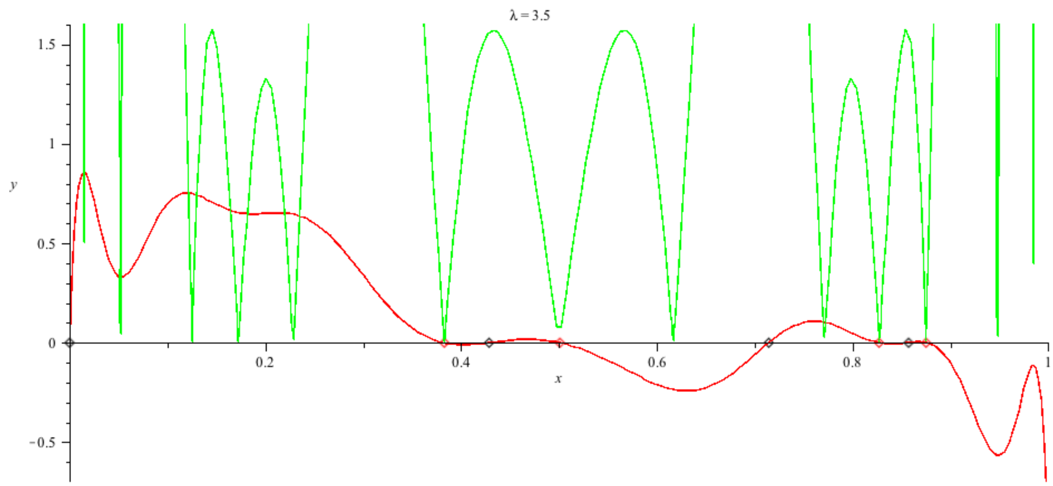
- 4-Periodizität $g^4(x) - x$ ist ein Polynom vom Grad 16, das die Nullstellen von $g^2(x) - x$ hat, also $x_{4,1}$ bis $x_{4,4}$ sind gleich $x_{2,1}$ bis $x_{2,4}$, allerdings ist die absolut genommene Steigung $|(g^n)'|$ an diesen Stellen größer 1, sie haben also die Repellereigenschaft. Die weiteren möglichen 12 Nullstellen sind nur noch numerisch zu berechnen.

- Attraktion herrscht, wie schon gesagt, nicht mehr an den 1- und 2-periodischen Punkten. Aber 4 weitere Nullstellen bilden einen Attraktor bis zu einem λ-Wert von 3.5440903595... (woher dieser Wert, siehe weiter unten)

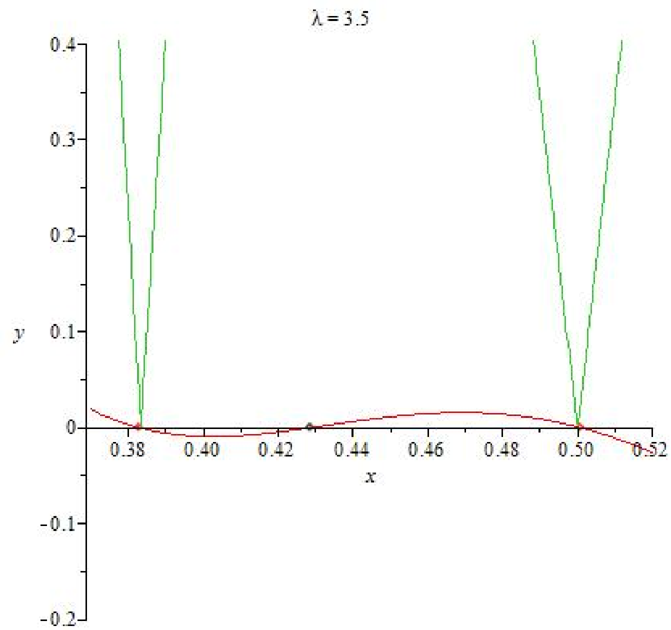
Wie schon gesagt, habe ich Maple zur formalen und numerischen Berechnung, sowie für die Grafiken benutzt. Die Nullstellen von $g^4(x) - x$ wurden mit "fsolve", bei einer Genauigkeit von 20 Stellen (Digits := 20) berechnet. Die Zahlenwerte habe ich hier aber nur auf 10 Dezimalstellen angegeben. In folgendem Beispiel wurde $\lambda = 3.5$ gesetzt mit folgenden Ergebnissen. Nullstellen von $g^4(x) - x$ in $[0, 1]$:

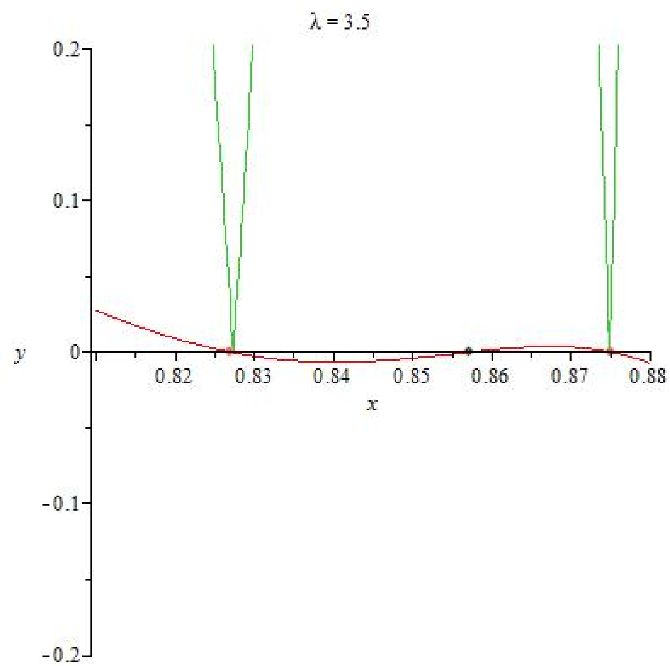
0., .3828196830, .4285714285, .5008842103, .7142857142, .8269407066, .8571428570, .8749972636

In folgender Grafik ist für $\lambda = 3.5$ in roter Farbe $g^4(x) - x$ gezeichnet und in Grün $|(g^4)'(x)|$. Auch hier wieder sind die 4-periodischen Punkte in Rot gezeichnet.



Es folgen zwei Abbildungen mit Ausschnitten zur besseren Darstellung des Polynoms in der Umgebung der periodischen Punkte.





Eine animierte Gif-Datei mit dem Namen log_Dgl_g4.gif zeigt das Aussehen von g(x) - x und $g'(x)$ für λ-Werte zwischen $1+\sqrt{(6)}$ und 3.5440903595....

Zur Berechnung des rechten Endpunktes des λ-Intervalls für die 4-Periodizität habe ich die Gleichungen $g^4(x) = x$ und $|(g^4)'(x)| = 1$ an "fsolve"übergeben und eine Einschränkung für den Lösungsbereich für λ festgelegt.

fsolve({g4(lambda, x) = x, abs(g4s(lambda, x)) = 1}, {x = 0 .. 1, lambda = 1+sqrt(6) .. 3.6})

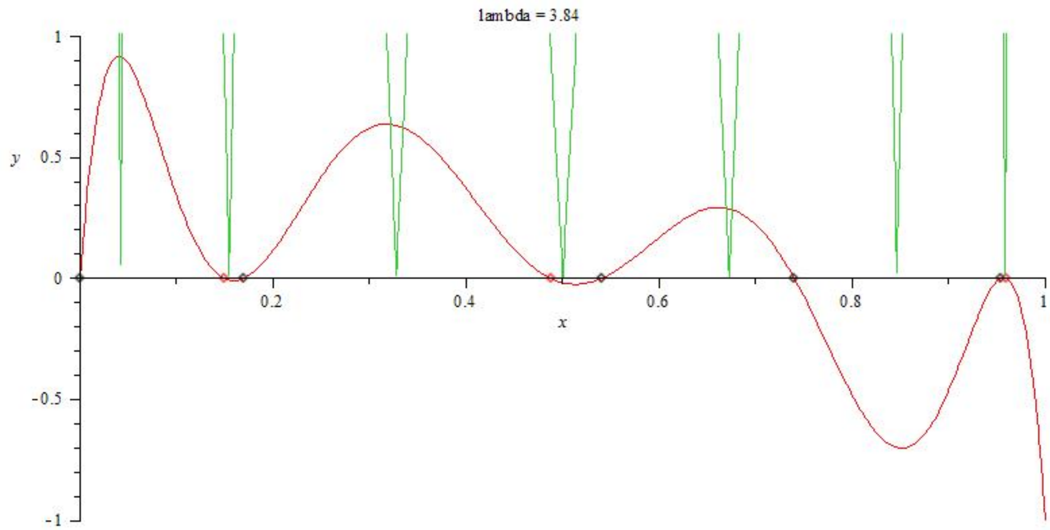
liefert das schon oben angegebene Ergebnis

x = 0.36329033741473578974, lambda = 3.5440903595519228536

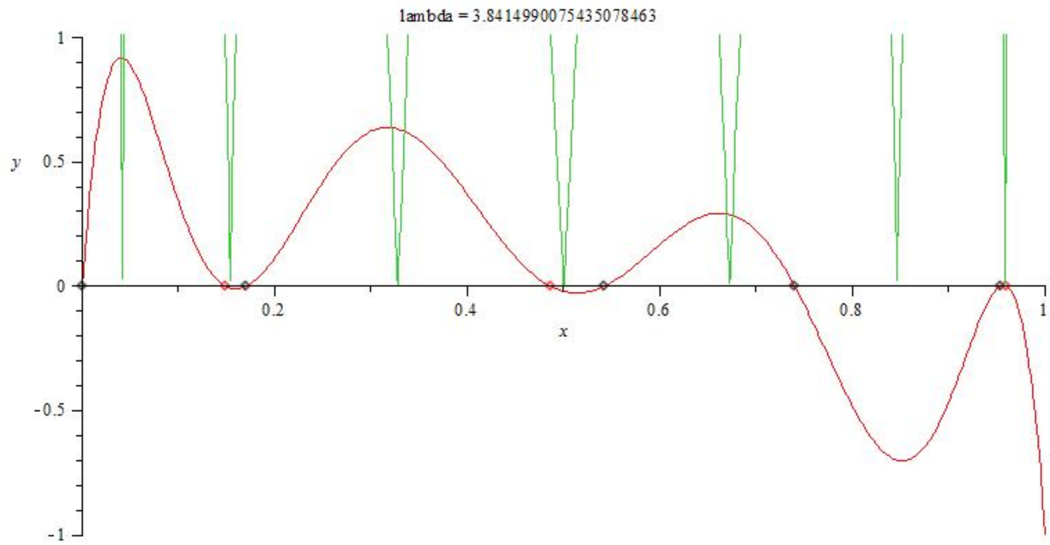
Setzt man zur Probe x und λ in $g^4(x)$ und $(g^4)'(x)$ ein, so erhält man:

0.36329033741473578966 bzw. -0.99999999999999999767

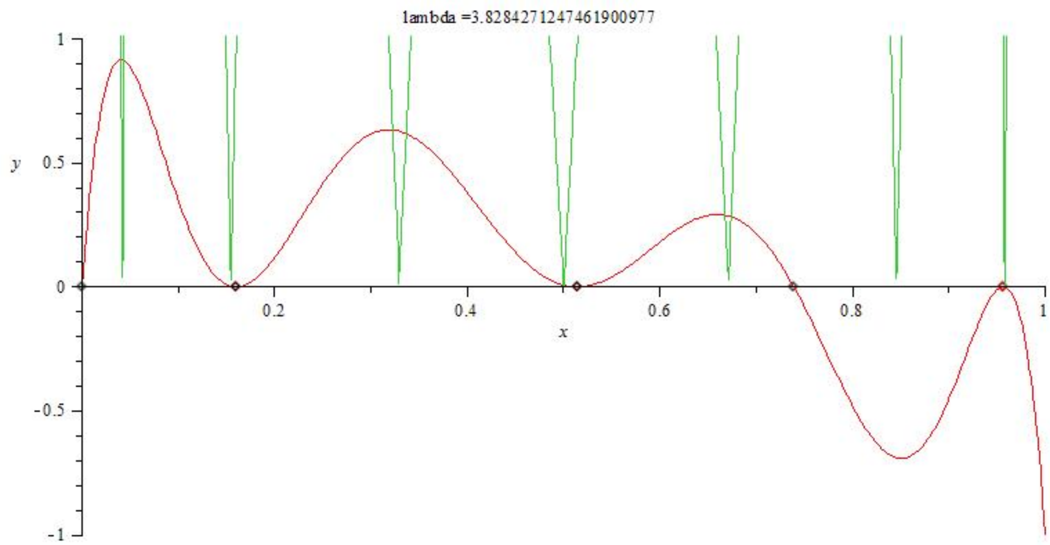
was auf eine gute Qualität des Ergebnises für λ hoffen läßt.
Die Steigung von $g^4(x)$ am linken λ-Intervallrand in Periodizitätspunkten ist 1, am rechten Rand ist sie -1.
Zum Abschluss der
Fall n = 3:
Bei der Untersuchung dieses Falles habe ich mit der Animation der beiden Funktionen $g^3(x) - x$ und $(g^3)'(x)$ begonnen, da ich noch keine Idee hatte, ob und wo ich eine Periodizität vermuten sollte. Die animierte Gif-Datei log_Dgl_g3_0_4.gif zeigt das Aussehen der beiden genannten Funktionen im λ-Intervall von 0 bis 4. Außer den beiden 1-periodischen Nullstellen, tauchen weitere Nullstellen erst sehr spät auf, in etwa ab $\lambda = 3.8$. Ein erster Schuss ins Blaue mit $\lambda = 3.84$ liefert 3 Nullstellen von $g^3(x) - x$ an denen die Steigung absolut kleiner 1 ist. Die Nullstellen sind:
0., .7395833333, .14940689655, .1694338196, .4880043871, .54038784162, .9537362774, .9594474442
Die zugehörigen Steigungen sind:
56.6, -6.22, -.875, 2.74, -.875, 2.74, 2.74, -.875
und die zugehörige Grafik:



Für 3 andere der oben angegebenen Nullstellen sind die Steigungswerte ebenfalls gleich, allerdings größer 1, sie bilden ebenfalls eine 3-Periodizität, aber mit der Repellereigenschaft.
Die Bestimmung des λ-Intervalls erfolgt auf ähnliche Weise, wie im Falle n = 4. Auch hier wird wieder fsolve eingesetzt, wobei die richtige Auswahl der Intervalleinschränkung für λ zu den gewünschten Ergebnissen führt. Der Befehl
fsolve({g3(lambda, x) = x, abs(g3s(lambda, x)) = 1}, {x = 0 .. 1, lambda = 3.8 .. 3.9})
liefert das Ergebnis x = .14872047044591178873, lambda = 3.8414990075435078463 und damit eine Näherung für den rechten Rand des Intervalls. Die folgende Grafik zeigt diese Situation.



Mit
fsolve({g3(lambda, x) = x, abs(g3s(lambda, x)) = 1},{x = 0 .. 1, lambda = 3.8 .. 3.84})
schließt man den oberen λ-Wert aus und ermittelt:
x = .51435527706199049117, lambda = 3.8284271247461900976
Allerdings liefert die Berechnung aller Nullstellen erst mit $\lambda = 3.8284271247461900977$ (der tatsächliche Grenzwert ist $1 + \sqrt{8}$) drei Werte mit einer Steigung kleiner 1, nämlich 0., 0.15992881841484186991, 0.15992881847767090796, 0.51435527698634250157, 0.51435527713763848077, 0.73879612503625855749, 0.95631784196563822886, 0.95631784198160945343, mit den Steigungen 56.112698372208091078, 0.99999999441386206435, 1.0000000055861379317, 0.99999999483395219626, 1.0000000051660478042, -6.1126983722080910740, 1.0000000049614348301, 0.99999999503856516817.
Daher wurde das folgende Diagramm mit diesem λ gezeichnet, bei dem allerdings die Darstellungsfeinheit nicht gereicht hat, eng nebeneinander liegende Nullstellen separiert darzustellen.



Wir halten also fest:

- 3-Periodizität existiert für zwei 3-Perioden von denen aber die
- Attraktion nur für eine 3-Periode gegeben ist. Deren λ-Intervall ist [3.8284271247461900977, 3.8414990075435078463].

Die Steigung von $g^3(x)$ am linken λ-Intervallrand in Periodizitätspunkten ist 1, am rechten Rand ist sie -1 (so wurden die beiden Ränder gerade bestimmt). Eine animierte Gif-Datei mit dem Namen log_Dgl_g3.gif zeigt das Aussehen von g(x) - x und $g'(x)$ für λ-Werte im oben angegebenen Intervall.