

1 Theoretische Überlegungen zu den Feigenbaumkonstanten

Ich habe bisher die wesentliche Aussage als zentraler Eigenschaft, die Periodenverdopplung, nicht bewiesen (und werde das auch nicht tun). In verschiedenen Veröffentlichungen, beispielsweise bei H. G. Schuster, W. Just „Deterministic Chaos“ [2] oder auch in dem Aufsatz „Feigenbaum Universalität: Beschreibung und Beweisskizze“ von U. Kirchgraber und N. Sigrist [4] werden Hinweise und Ideen dargestellt, die die Aussagen und die Beweisidee von Mitchel Feigenbaum beinhalten. Wie dort berichtet wird, hat Feigenbaum den Beweis nicht selber geführt, sondern wiederum andere haben die Ideen aufgegriffen und die Beweise erbracht. Von besonderer Bedeutung ist die Universalität der Aussagen, die sich nicht auf das Thema der logistischen Gleichung beschränken, sondern eine ganze Klasse von Funktionen abdeckt. Ich möchte als erstes einige Vermutungen zusammenstellen, die teilweise bereits in meinem Aufsatz vorgekommen sind und hier wegen ihrer grundlegenden Bedeutung nochmals aufgeschrieben werden sollen. Ich beziehe die Aussagen auf die Bezeichnungen in meinem Aufsatz und forme, wo nötig, die Bezeichnungen entsprechend um.

1. Im (λ, x) -Feigenbaumdiagramm existiert eine Folge von Intervallen $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ in denen für jedes λ die g^i einen 2^i -periodischen Orbit haben, der die Attraktoreigenschaft hat. (Diese Aussage beinhaltet die Periodenverdopplung).
2. Jedes dieser Intervalle $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ enthält einen Wert Λ_i , der (genau) einen der „Äste“ der g^i in der Höhe $x = \frac{1}{2}$ schneidet, oder anders ausgedrückt, der Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ erzeugt in diesem Intervall einen periodischen attraktiven Orbit, der ein Superzyklus ist.
3. Die λ_i und damit auch die Λ_i konvergieren für $i \rightarrow \infty$ gegen $\lambda-2_\infty$.
4. Im Aufsatz habe ich bereits die Definitionen der beiden Feigenbaumkonstanten α und δ angegeben:

$$\alpha := -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} \quad \text{und} \quad \delta := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

Dabei sind die d_n die (vorzeichenbehafteten) Abstände zweier Bifurkations-Äste an der jeweiligen Stelle Λ_n , also $d_n = g^{2^n}(\Lambda_n, \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$. Beide Grenzwerte existieren.

Bei der Suche nach Material zur Chaostheorie habe ich zwei durchgeführte theoretische Ansätze für die Beweise der oben aufgestellten Behauptungen gefunden, die beide in [1] dargestellt werden, die sog. Knettheorie (kommt tatsächlich von kneten, im Englischen kneading) und die Renormierung. Die zweite Methode wurde speziell auch von Feigenbaum entwickelt und zur Untersuchung von Periodenverdopplungen verwendet. Mit der Knettheorie kann man die Punkte 1, 2

und 3 beweisen, mit der Renormierung Punkt 4 incl. der Bestimmung von α und δ , sowie λ - 2_∞ . Beide Theorien enthalten eine Fülle von spannenden Ideen, die, und das ist entscheidend, nicht nur auf die logistische Gleichung, sondern auf eine viel größere Klasse von Funktionen anwendbar sind. Es handelt sich beispielsweise um unimodale Funktionen f , d.h. Funktionen, die ein reelles Intervall $[a, b]$ in sich abbilden und genau ein lokales Maximum bei $c \in (a, b)$, genannt "kritischer Punkt", haben und links und rechts davon streng monoton sind. Oft wird auch noch die Symmetrie zur senkrechten Achse durch c hinzugenommen. Unser Beispiel $g_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ mit $\lambda \in [0, 4]$ erfüllt alle diese Voraussetzungen einschließlich der Symmetrie mit $a=0$, $b=1$ und $c=\frac{1}{2}$ als kritischem Punkt. (Ich schreibe in diesem Anhang den Parameter λ als Subscript von g , da ich ihn öfter mal brauche, aber keine funktionale Abhängigkeit $g(\lambda, x)$.) Mit einer zusätzlichen Eigenschaft von f , die man S-unimodal nennt, erhält man bereits eine Aussage über Orbits von f . Dazu folgende Definition:

Definition 1

(Schwarzsche Ableitung)

Für eine Funktion $f \in C^3([a, b])$ nennt man

$$Sf(x) := \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

die Schwarzsche Ableitung von f an der Stelle $x \in [a, b] \setminus \{c\}$. Ein unimodales f wird S-unimodal genannt, wenn $Sf(x) < 0$ für alle $x \in [a, b] \setminus \{c\}$.

Leicht berechnet man:

$$Sg_\lambda(x) = -\frac{3}{2} \left(\frac{-2}{1-2x} \right)^2 < 0 \text{ mit } x \in [0, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Somit ist $g_\lambda(x)$ S-unimodal für alle $\lambda \in [0, 4]$. Folgender Satz ist damit schon anwendbar:

Satz 1

(Satz 2.14 aus [1])

$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sei S-unimodal mit kritischem Punkt c . Dann gilt:

- (a) f besitzt höchstens einen stabilen periodischen Orbit.
- (b) Falls f einen stabilen periodischen Orbit besitzt, dann attrahiert dieser den kritischen Punkt c . (Was bedeutet, dass der Abstand zwischen $f^n(c)$ und den Orbitpunkten für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht).

Anzuwenden ist dieser Satz auf unsere Funktion $g_\lambda(x)$ für jedes feste λ . Für verschiedene λ haben wir ja bereits stabile Orbits oder wie wir es auch genannt haben, n-Zyklen mit Attraktoreigenschaft gefunden. Aber Teil (a) des Satzes sagt leider nichts über die Existenz von Orbits aus, das bleibt der Knettheorie vorbehalten. Ich habe Aussage (b) auf $g_\lambda(x)$ angewendet und die Werte von $g_\lambda^n(1/2)$ für $\lambda = 3.4$ beispielhaft berechnet. Die beiden Werte des 2-Zyklus an dieser Stelle sind näherungsweise 0.842154 und 0.451963. Die Iteration von 1/2 liefert:

n	Iterierte
0	0.5
1	0.85
2	0.4335
9	0.844762
10	0.445874
19	0.841467
20	0.453562
29	0.842327
30	0.451563
39	0.842111
40	0.452065
49	0.842165
50	0.451937
59	0.842152
60	0.451970
Iterierte von 1/2 unter $g_{3.4}(x)$	

Ein weiterer Hinweis auf meine bisherigen Ausführungen: Wir hatten im Anhang über die n-Iterationen auch das einen 3-Zyklus beinhaltende Fenster in der Gegend von $\lambda = 3.8$ betrachtet, genauer gesagt, dort liegt neben einem 3-Zyklus mit Attraktionseigenschaft (stabiler Orbit) auch ein 3-Zyklus mit Repellereigenschaft. Dies ist natürlich kein Widerspruch zu obigem Satz 1.

Ein letztes noch dazu. $g_4(x) = 4x(1 - x)$ hat keinen stabilen Orbit, d.h. das höchstens in Satz 1 (a) ist sehr wohl angebracht.

Ich will nun versuchen, die Grundideen und Hauptaussagen beider Theorien im Überblick darzustellen. Zunächst zur Knettheorie.

2 Knettheorie

Die Idee dieser Theorie besteht im Wesentlichen aus der symbolischen Beschreibung der Lage der Iterierten im Bezug auf die zum kritischen Punkt c gehörige Parallel zur λ -Achse. Dazu wird der sog. Pfad einer unimodalen Funktion f an einer Stelle x definiert:

Definition 2

(Definition 7.13 in [1])

Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine unimodale Funktion und $c \in (0, 1)$ der kritische Punkt von f . Für $x \in [0, 1]$ definiert man dann $P_f(x) = (p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, den Pfad von f an der Stelle x . Dies ist eine unendlich lange Folge, die aus drei Elementen bestehen kann:

$$p_n := \begin{cases} 0 & \text{für } f^n(x) < c \\ k & \text{für } f^n(x) = c \\ 1 & \text{für } f^n(x) > c \end{cases}$$

Den Pfad $K(f) := P_f(f(c))$ nennen wir darüber hinaus Kneadingfolge von f .

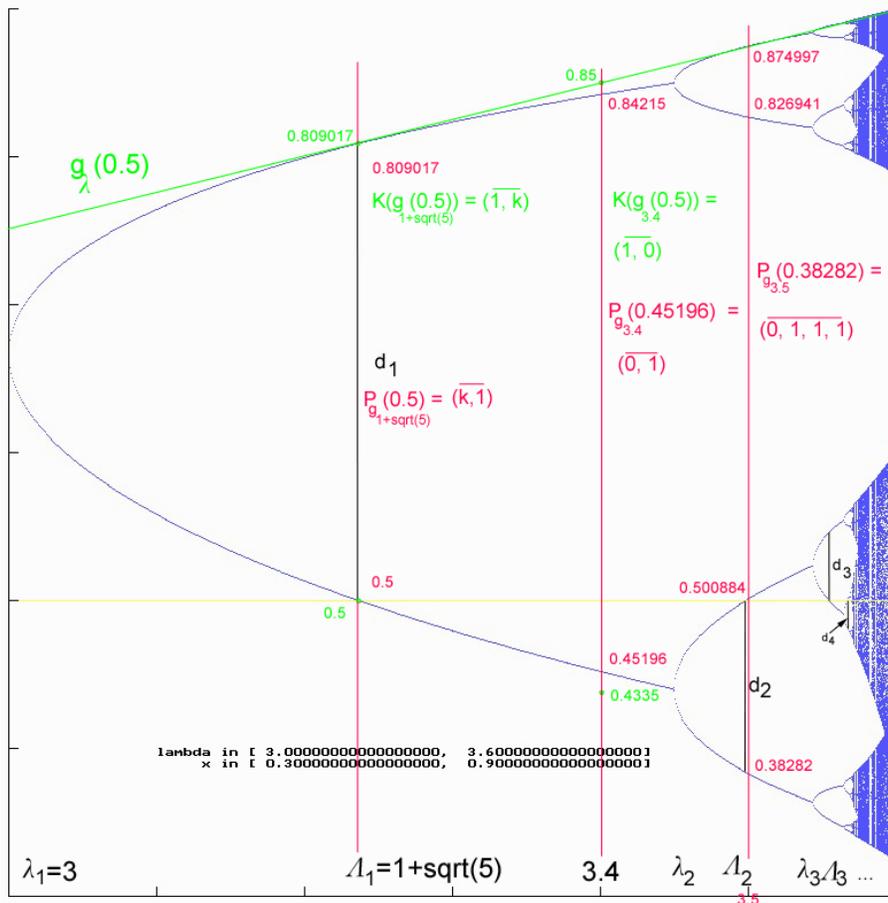


Abbildung 1: Darstellung verschiedener Pfade im Feigenbaumdiagramm

Das heißt also, die Iterierten zu einem Startwert x werden nacheinander auf ihr Verhältnis zu c geprüft (drüber, drunter oder drauf) und daraus wird der Pfad dann gebildet.

Die im Aufsatztext bereits benutzte Abbildung 44 habe ich zur Erklärung der Idee etwas erweitert.

In roter Farbe wurde an den Stellen $\lambda = 1 + \sqrt{5}, 3.4, 3.5$ der jeweilige Pfad berechnet und neben Senkrechten durch die genannten Punkte aufgeschrieben, ebenso wie die zugehörigen Iterierten (x -Werte der Schnittstellen mit den Ästen). Bei der Schreibweise eines Pfades wurde für periodische Pfade die gleiche Schreibweise verwendet, wie für die Periode eines Dezimalbruches: $(0, 1) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$. Ein Pfad für einen n -Zyklus ist davon abhängig, mit welchem x_i man den Pfad bildet; ich habe in der Abbildung immer den kleinsten Wert

Definition 3*(Definition 7.18 in [1])*Für obige S und T schreibt man:

$$S \prec T :\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Entweder } s_m < t_m \text{ und } \varepsilon_{m-1}(S) \text{ gerade} \\ \text{oder } s_m > t_m \text{ und } \varepsilon_{m-1}(S) \text{ ungerade} \end{cases}$$

Ausserdem ist:

$$S \preceq T :\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Entweder } S \prec T \\ \text{oder } S = T \end{cases}$$

Auch hierzu zunächst ein paar Beispiele. Es gilt:

$$\begin{aligned} (\bar{0}) &\prec (\bar{1}) \\ (\bar{0}) &\prec (k, \bar{1}) \\ (k, \bar{0}) &\prec (1, \bar{0}) \\ (\bar{0}) &\prec (0, 1, \bar{0}) \\ (\bar{1}) &\succ (\bar{0}) \\ (\bar{1}) &\prec (1, \bar{0}) ! \\ (\bar{1}) &\succ (1, 1, \bar{0}) !! \\ (\bar{1}) &\prec (1, 1, 1, \bar{0}) !!! \end{aligned}$$

Es besteht übrigens ein interessanter Zusammenhang zwischen der Lage der x im Intervall $[0, 1]$ (für festes λ), also der Ordnungsrelation $<$ auf den reellen Zahlen und der neu eingeführten Relation \prec , den der folgende Satz zeigt:

Satz 2*(Satz 7.21 in [1])*Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ unimodal. Dann gilt für alle $x, y \in [0, 1]$:

- (a) $P_f(x) \prec P_f(y) \Rightarrow x < y$
 (b) $x < y \Rightarrow P_f(x) \preceq P_f(y)$

Obiges Beispiel (*) kann auch hier als Beispiel herangezogen werden. Tatsächlich ist $(\bar{0}, 1, 1, 1) \prec (\bar{1}, 1, 0, 1)$

Es ist sogar so, dass die Ordnung \prec gerade so definiert wurde, damit dieser Satz gilt, also die Ordnung $<$ im Intervall $[0, 1]$ erhalten wird.

Eine unimodale Abbildung f steigt links von c an, rechts fällt sie. Nach einer Iteration wird daher links von c die Ordnung bei den Bildern beibehalten, rechts umgekehrt (siehe Abbildung 2). Die 0 in einem Pfad steht für eine positive Steigung von f an der Stelle der Iterierten, die 1 für eine negative: $f'_\lambda(x_i) = f'_\lambda(f_\lambda^i(x_0)) < 0$, wenn $p_i = 1$. Daraus folgt, dass eine ungerade Anzahl von Einsen in einem periodischen Pfad eine negative Steigung der n -ten Hintereinanderausführung von f_λ an der Stelle x_0 nach sich zieht, d.h. $(f_\lambda^n)'(x_0) < 0$. (siehe dazu den Beweis von Satz 2 in (3), Anwendung der Kettenregel).

Nun aber zu einer zentralen Aussagen der Knettheorie:

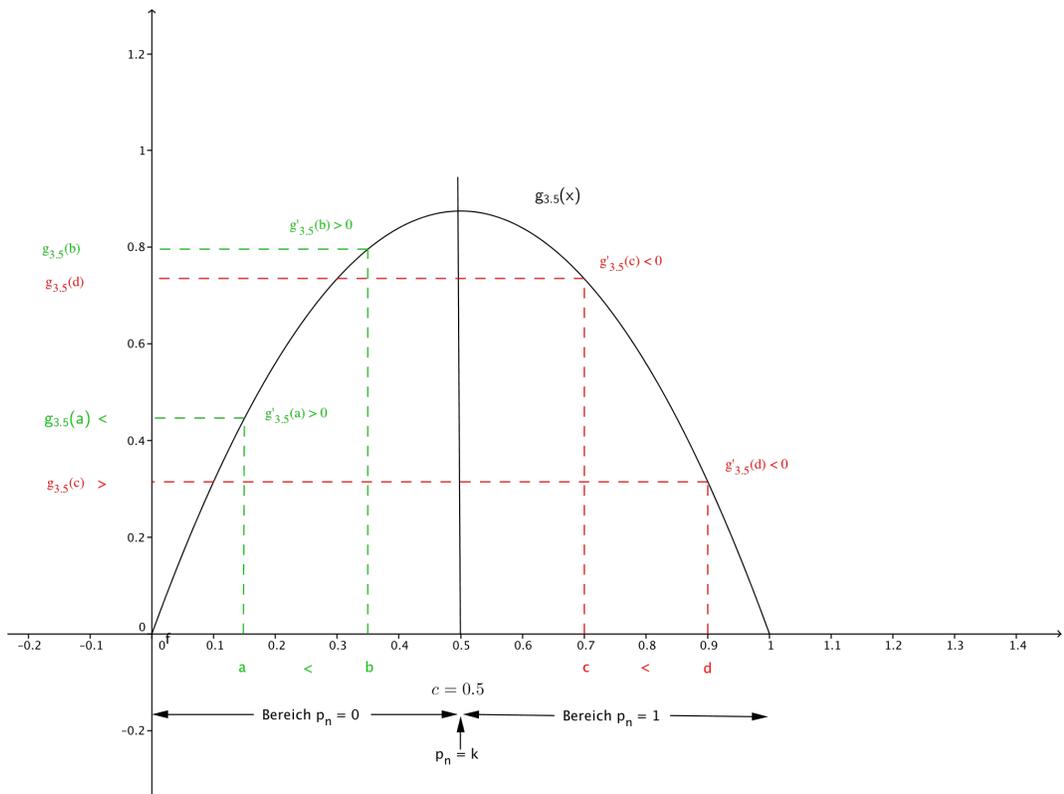


Abbildung 2: Ordnung von Iterierten unimodaler Abbildungen

Satz 3*(Satz 7.24 in [1])*

Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ aus $C[0, 1]$ (also stetig) und $S = (\overline{s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}})$ eine periodische Folge, die an keiner Stelle ein 'k' enthält und Pfad von f ist.

Gilt nun für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$\sigma^i(S) \preceq K(f)$$

dann gibt es einen periodischen Punkt x_0 von f der Periode n mit $P_f(x_0) = S$ und jeder periodische Punkt x mit demselben Pfad ($P_f(x) = S$) hat entweder die Periode n oder $2n$.

Als ich diesen Satz zum ersten Mal sah, war mir zunächst nicht klar, was es mit den beiden Perioden n und $2n$ auf sich hat und ich habe eine Weile gebraucht, bis mir das klar wurde. Aus den Augen, aus dem Sinn! Nach diesem Motto sollte man nicht leben und auch keine Mathematik betreiben. Jedenfalls lag es daran, dass ich übersehen hatte, dass hinter einem Bifurkationspunkt der verzweigte Ast ja weiterläuft aber im Feigenbaumdiagramm nicht mehr gezeichnet wird, da ab dort die Attraktionseigenschaft nicht mehr gegeben ist. Um die Zusammenhänge zu erläutern habe ich ein weiteres Diagramm (Abbildung 3) gezeichnet.

Das rechte eingezeichnete Beispiel, die rote Senkrechte an der Stelle $\lambda = 3.48$, hat Schnittpunkte mit den 4 blauen Ästen, die aus den Bifurkationspunkten wachsen - dies ist ein 4-Zyklus mit Attraktoreigenschaft (periodischer Orbit) und mit den roten fortgesetzten Ästen - dort liegt ein 2-Zyklus mit Repellereigenschaft. Berechnet man nun die beiden Pfade erhält man das gleiche Ergebnis: $P_{g_{3.48}}(0.395065) = P_{g_{3.48}}(0.432985) = (\overline{0, 1})$

Die Voraussetzungen des Satzes 3 sind erfüllt und x_0 ist 0.432965, der untere rote Schnittpunkt, der zum 2-Zyklus gehört. Aber es gibt eben auch einen 4-Zyklus, blaue Schnittpunkte, mit gleichem Pfad, der nur 2-periodisch ist.

Ein weiterer möglicher Fall, den dieser Satz zulässt, ist, dass mit dem gleichen Pfad ein weiterer n -Zyklus existiert. Dies ist im Beispiel für $\lambda = 3.48$ nicht der Fall (dies würde, wie wir sehen, werden der folgende Zusatz auch nicht erlauben), denn der Pfad zum zweiten roten Periodenpunkt sieht anders aus: $P_{g_{3.48}}(0.854371) = (\overline{1, 0})$.

Zusatz 3.1*(Korollar 7.26 in [1])*

Sei f eine S -unimodale Funktion auf $[0, 1]$ (also mit negativer Schwarzsche Ableitung). Weiterhin sei $S := (\overline{s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}})$ eine n -periodische Folge, die an keiner Stelle ein 'k' enthält und überdies eine ungerade Anzahl von Einsen hat.

Gilt nun für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$\sigma^i(S) \preceq K(f)$$

dann existiert ein eindeutig bestimmter periodischer Punkt $x_0 \in [0, 1]$ von f der Periode n (also ein Punkt, der zu einem n -Zyklus gehört), für den gilt:

$$P_f(x_0) = S.$$

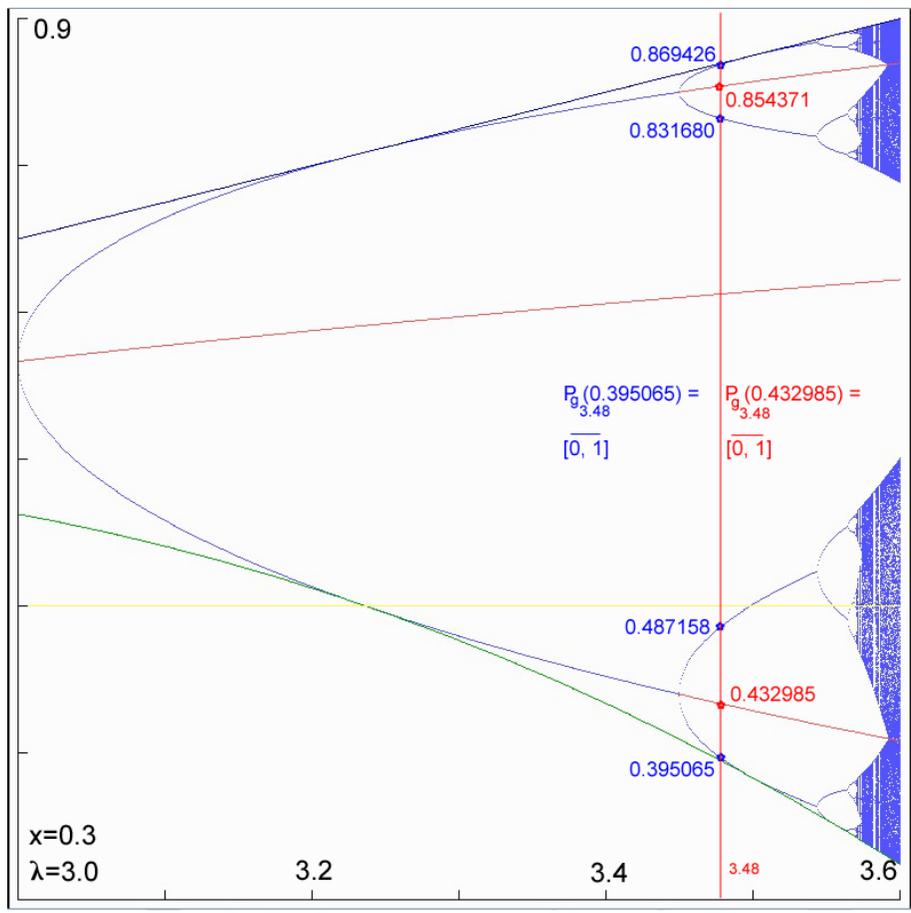


Abbildung 3: 2-periodische Pfade bei 2- und 4-periodischen Zyklen

Damit liegt nun (für die Periode n) eine Eindeutigkeitsaussage vor. Als zusätzliche Voraussetzungen ist die schon oben für eine Eindeutigkeitsaussage verwendete Schwarzsche Ableitung dazugekommen und eine ungerade Anzahl von Einsen, was bei gerader Periodenlänge (etwa 2^n) gerade dafür sorgen kann, dass die Hälfte der Iterationswerte überhalb von c liegt. Unser obiges Beispiel an der Stelle $\lambda = 3.48$ erfüllt dies für die Periode 2. Was ist mit der Periode 4 (allgemein $2n$) geschehen? Dies klärt ein weiterer Zusatz:

Zusatz 3.2

Sei zusätzlich $(f^n)'(x_0) < -1$ und $K(f) = S$ (oder $\sigma(S) = K(f)$ für ein $i \in \mathbb{N}$), dann existiert ein zweiter eindeutig bestimmter periodischer Punkt y_0 mit zugehörigem $2n$ -Zyklus und die Pfade sind gleich: $P_f(x_0) = P_f(y_0)$.

Dies ist genau die Situation in unserem Beispiel $\lambda = 3.48$. Die Ableitung ist $(g_{3.48}(g_{3.48}))'(0.432985) = -1.1\dots$, x_0 liegt ja gerade auf einem „unsichtbaren“ Ast, will heißen, einem mit Repellereigenschaft.

So weit, so gut! Die Hälfte des Weges hätten wir damit „geknetet“. Auf zum zweiten Teil.

Betrachtet man einen Zyklus im Vergleich zu dem zugehörigen Pfad, nehmen wir mal den bei $\lambda = 3.5$, dann fällt auf, dass der gleiche Zyklus so viele unterschiedliche Pfade haben kann, wie er Elemente hat, eben abhängig davon, mit welchem man beginnt. Die Periode im Pfad wird dabei einfach zyklisch vertauscht: $(0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1)$ sind bei 3.5 die 4 Pfade. Um hier etwas Ordnung zu schaffen, haben wir ja eine Ordnungsrelation \prec . So ist $(0, 1, 1, 1) \prec (1, 1, 0, 1) \prec (1, 1, 1, 0) \prec (1, 0, 1, 1)$.

Den größten Pfad (und damit nach Satz 2 auch der zum größten Iterationswert des Zyklus gehörige) nennen wir

$$\text{maximale Folge im Orbit: } M(S), \text{ für } S = (\overline{s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}}).$$

Betrachten wir nun Pfade, die im Feigenbaumdiagramm jeweils links vom Schnittpunkt mit $c = \frac{1}{2}$ liegen, den wir Λ_i genannt haben, aber jeweils rechts vom nächsten Bifurkationspunkt λ_{i+1} . In Abbildung 1 kommen schon mit $P_{g_{3.4}}$ und $P_{g_{3.5}}$ zwei solche vor. Die jeweilige zugehörige maximale Folge ist $\tau_1 = (\overline{1, 0})$ bzw. $\tau_2 = (\overline{1, 0, 1, 1})$. Links von λ_1 erhalten wir $\tau_0 = (\overline{1})$ und zwischen Λ_3 und λ_4 wäre sie $\tau_3 = (\overline{1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0})$. Die benutzte Benennung τ_k führt eine Menge von Folgen ein, die ein einfaches Bildungsgesetz haben: Um τ_{i+1} zu erhalten verdoppelt man die Periode (!) und tauscht das letzte Element ($0 \longleftrightarrow 1$). Also wäre $\tau_4 = (\overline{1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1})$. Jedes dieser τ_k ist maximal: $M(\tau_k) = \tau_k$. Es gilt der Satz:

Satz 4

(Satz 7.28 in [1])

- (a) τ_k hat die Periode 2^k
- (b) τ_k hat eine ungerade Anzahl von Einsen
- (c) $\tau_0 \prec \tau_1 \prec \tau_2 \dots$

Das Verhältnis zu Kneadingfolgen klärt der Zusatz:

Zusatz 4.1

Liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden τ_k und τ_{k+1} eine Kneadingfolge $K(f)$ dann ist sie schon $= \tau_k$ (genauer: $\tau_k \preceq K(f) \prec \tau_{k+1} \Rightarrow \tau_k = K(f)$).

Wir weiten nun unsere Betrachtungen auf das gesamte Feigenbaudiagramm aus und definieren eine Übergangsfamilie unimodaler Abbildungen (f_λ) .

Definition 4

(Definition 7.31 aus [1])

Eine Familie (f_λ) unimodaler Abbildungen auf $[0, 1]$ - in beiden Variablen als C^∞ vorausgesetzt - mit $\lambda \in [\lambda_a, \lambda_b]$ heißt Übergangsfamilie, wenn gilt:

- (a) $K(\lambda_a) = (\bar{0})$
- (b) $K(\lambda_b) = (1, \bar{0})$
- (c) $Sf_\lambda < 0$ für $\lambda > \lambda_a$

Unsere logistische Abbildung $g_\lambda(x)$ auf $[0, 4] \times [0, 1]$ erfüllt dies. Daraus erschließt man für das rechte Intervallende bei $\lambda = 4$ ein ziemliches „Chaos“. Denn jede periodische Folge S beliebiger Periodenlänge (die kein k enthält) ist i -mal geschiftet kleiner als $(1, \bar{0}) = K(g_4)$ wie man zeigen kann, und damit folgt aus Satz 3, dass es dazu einen periodischen Punkt mit zugehörigem Zyklus gibt.

Zusatz 4.2

Es läßt sich aus der Maximalität der τ_k zeigen, dass zu jedem τ_k ein $\lambda = \lambda(k) \in (\lambda_a, \lambda_b)$ existiert, mit $\tau_k = K(f_{\lambda(k)})$. Zusammen mit Zusatz 4.1 folgt, dass $K(f_\lambda)$ auf dem ganzen Intervall zwischen τ_k und τ_{k+1} konstant gleich τ_k ist.

Damit wissen wir nun auch, wie die Kneadingfolgen aussehen. Langsam aber sicher nähern wir uns dem Höhepunkt dieser Anwendung der Knettheorie; die Übergangsfamilien zusammen mit den (τ_k) ermöglichen nun die Schlüsse über das Aussehen des Feigenbaumdiagramms (im Sinne von bewiesenen Aussagen, nicht von numerischen Vermutungen). Wir haben alle Definitionen und Sätze zusammen, um das jetzt zu können und bauen uns quasi ein formales Modell - auf dem Gerüst der τ_k - eines Feigenbaumdiagramms auf.

Die Abbildung 4 zeigt die im folgenden beschriebenen Sachverhalte parallel auch optisch am Beispiel unserer Übergangsfamilie logistische Gleichung. Die Indices (hier $k = 0$ und $k = 1$) und anderen Bezeichnungen (g statt f) sind spezialisiert auf den Anfang der Periodenverdopplung, im weiteren Text bleibe ich aber bei den allgemeinen Bezeichnungen. Die Abbildung beginnt am linken Rand bei Λ_0 , also dem ersten Schnittpunkt mit $x = c = \frac{1}{2}$. Die farbliche Unterlegung (hellgrün, rosa, türkis und rot) teilt das Bild in vier Bereiche, auf die im folgenden zur Erläuterung Bezug genommen wird.

Wir starten mit einem beliebigen $k \in \mathbb{N}_0$ und schnappen uns die Folge τ_k . Solange $K(f_\lambda) \succeq \tau_k$ ist, ist auch $\sigma^i(\tau_k) \preceq M(\tau_k) = \tau_k \preceq K(f_\lambda)$. Damit sind die Voraussetzungen des Zusatzes 3.1 erfüllt und es existiert genau ein

2^k -Zyklus mit dem Pfad τ_k . Die Werte des Zyklus stammen bekanntlich aus $[0, 1]$ und der größte, wir nennen ihn $\gamma_k(\lambda)$ liefert wegen der Maximalität den Pfad $\tau_k : P_{f_\lambda}(\gamma_k(\lambda)) = \tau_k$. Die Tatsache, dass die Anzahl der Einsen eines τ_k ungerade ist, hat nicht nur den Zusatz 3.1 anwendbar gemacht, sondern liefert hier eine Aussage über die Steigung:

$$(f_\lambda^{2^k})'(\gamma_k(\lambda)) < 0$$

(grüner Bereich für $k=0$, rechte Hälfte des türkisfarbigen Bereiches für $k=1$), wie oben hinter Satz 2 bereits begründet. Eigentlich würde es reichen, ungleich 1 zu zeigen, denn jetzt kann man den Satz über implizite Funktionen anwenden, was die Existenz einer stetigen Funktion $\gamma_k(\lambda)$ in der (λ, x) -Ebene, also dem Feigenbaumdiagramm nach sich zieht.¹ Jetzt ist auch endlich mein Ausdruck „Ast“ spezifiziert, mit dem ich die sichtbaren und unsichtbaren Zweige im Feigenbaumdiagramm bezeichnet habe.

Bemerkung 1

Der gesamte Ast $\gamma_k(\lambda)$ hat auch einen Teil, für den $1 > (f_\lambda^{2^k})'(\gamma_k(\lambda)) > 0$ gilt;² er liegt vor dem Schnittpunkt Λ_k (links des grünen Bereiches außerhalb des Bildes für $k=0$ und die linke Hälfte des türkisfarbigen Bereiches für $k=1$) und auch hier kann der Satz über implizite Funktionen verwendet werden, um eine stetige Funktion $\gamma_k(\lambda)$ zu erhalten, sofern man beweisen kann, dass diese Ungleichung gilt. Im Punkt Λ_k ist die Steigung bekanntlich 0 (Superzyklus, die Kneadingfolge enthält k). Wir kommen gleich darauf zurück.

Zusatz 4.2 sichert die Konstanz von $K(f_\lambda)$ zwischen τ_k und τ_{k+1} . Zusatz 3.2 wiederum ($(f_\lambda^{2^k})'(\gamma_k(\lambda)) < -1$, rosa Bereich für $k=0$, roter Bereich für $k=1$) bringt nun ab dem Bifurkationspunkt λ_{k+1} den $2 * 2^k = 2^{k+1}$ - Zyklus ins Spiel, der den gleichen Pfad wie $\gamma_k(\lambda)$ hat (man kann auch sagen, er hat den Pfad $\tau_k \tau_k$, was natürlich gleich τ_k ist³). Dieser Zyklus hat ebenfalls einen größten Punkt, der dann sinngemäß $\gamma_{k+1}(\lambda)$ heißt. Dass unsere Übergangsfamilie diese Steigungseigenschaft hat (genauer $1 > (f_\lambda^{2^{k+1}})'(\gamma_{k+1}(\lambda)) > -1$ zwischen λ_k und λ_{k+1} und < -1 rechts davon), haben wir schon im Anhang (4) numerisch festgestellt und in (3) theoretisch festgehalten. Damit einher gehen die Attraktor- und Repelleigenschaften (stabil = grün, instabil = rot) der Äste. Allerdings fehlt für den jeweils linken Bereich zwischen λ_k und Λ_k (links von hellgrün und der linke türkisfarbene Bereich) der Nachweis der Ungleichung $1 > (f_\lambda^{2^{k+1}})'(\gamma_{k+1}(\lambda)) > 0$, wobei es reichen würde, dass $(f_\lambda^{2^{k+1}})'(\gamma_{k+1}(\lambda)) \neq 1$ ist, um den Satz über implizite Funktionen anwenden zu können.⁴ Sowohl Devaney [11] als auch Metzler [1]

¹Siehe dazu auch Devaney [11], Satz 12.5; dort wird der Satz über implizite Funktionen auf $f_\lambda(x) - x$ angewendet.

²Dies ist kein Widerspruch zu dem Schluss nach Satz 2, da vor Λ_k das vorherige τ_{k-1} gilt und damit eine andere Kneadingfolge

³Die Verkettung zweier periodischer Folgen ist definiert durch $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_m)(t_0, t_1, t_2, \dots, t_m) = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_m, t_0, t_1, t_2, \dots, t_m)$

⁴Wohl gemerkt, die Existenz der Punkte $\gamma_{k+1}(\lambda)$ ist aus obigem gesichert!

(a) Die Existenz von $\lambda > \lambda_{k+1}$, für die gilt $(f_\lambda^{2^k})'(\gamma_k(\lambda)) < -1$ ist eine Eigenschaft der jeweiligen Übergangsfamilie, die bewiesen werden muss. Ohne sie gibt es keine instabilen Äste $\gamma_k(\lambda)$.

(b) Ebenfalls ist die Eigenschaft, dass es (genau) eine Stelle $\lambda = \lambda_{k+1}$ gibt, an der die Steigung -1 wird ($(f_{\lambda_{k+1}}^{2^k})'(\gamma_k(\lambda_{k+1})) = -1$) eine Annahme, die eine zu beweisende Eigenschaft der Übergangsfamilie darstellt. An dieser Stelle wird der stabile 2^k - Zyklus von $\gamma_k(\lambda)$ instabil (Attraktor wird zu Repeller) und der stabile Orbit von $\gamma_{k+1}(\lambda)$ geboren (Bifurkationspunkt).

(c) Die Eindeutigkeit des Bifurkationspunktes λ_{k+1} ist äquivalent zu der Eigenschaft in (a) für alle $\lambda > \lambda_{k+1}$.

Es bleiben noch zwei Eigenschaften übrig, die wir erwähnen müssen:

- Die Äste $\gamma_k(\lambda)$ und $\gamma_{k+1}(\lambda)$ kleben an der Stelle $\lambda = \lambda_{k+1}$ zusammen, formal:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{k+1}} (\gamma_{k+1}(\lambda) - \gamma_k(\lambda)) = 0$$

Dies ist gerade die Stelle der Periodenverdopplung, also der jeweilige Bifurkationspunkt.

- Die in einem Bifurkationspunkt entspringenden beiden stabilen Äste laufen auf unterschiedlichen Seiten des ab dort instabilen Astes. $\gamma_1(\lambda)$ und seinen Zwilling schließen $\gamma_0(\lambda)$ oberhalb von c , also im Intervall $(c, 1]$ ein. Abbildung 5 zeigt diese Situation für $\lambda = 3.15$ im Diagramm für grafische Iteration. $g_{3.15}$ ist in rot dargestellt, $g_{3.15}^2$ in blau und die 1. Winkelhalbierenden in grün. Der Schnittpunkt des roten und grünen Grafen ist der 1-periodische Punkt auf $\gamma_0(3.15)$, die beiden 2-periodischen Punkte, die äußeren Schnittpunkte von blauem und grünem Grafen liegen rechts von $c = \frac{1}{2}$ und beiderseits des 1-periodischen Punktes.

Soweit die Informationen zur Knettheorie.

3 Renormierung

Die Renormierung war ein Hauptwerkzeug mit dem Feigenbaum an die Untersuchung der unimodalen Abbildungen heranging. Dabei handelt es sich um ein Werkzeug, das eine gewisse Ähnlichkeit der Abbildungen f_λ^n bzw. Teile von Ihnen ausnutzt. Ein Renormierungsoperator arbeitet „wie ein Mikroskop“ [1], eine Eigenschaft, die sicher sehr nützlich erscheint, denn beim Verfolgen der Periodenverdopplungen ($\lambda \rightarrow \lambda \cdot 2_\infty$) werden die Abstände zwischen den λ_k immer kleiner. Wie wir wissen, hat Feigenbaum seine Untersuchung durch spezielle Computersimulationen vorgenommen. Wenn man bedenkt, zu welcher Zeit er das gemacht hat (Mitte der 1970er Jahre) und was seinerzeit zur Verfügung stand (vermute mal, mehr als ForTran wird es nicht gewesen sein, vielleicht Anfänge von Computeralgebraprogrammen), kann man diese Leistung nicht hoch

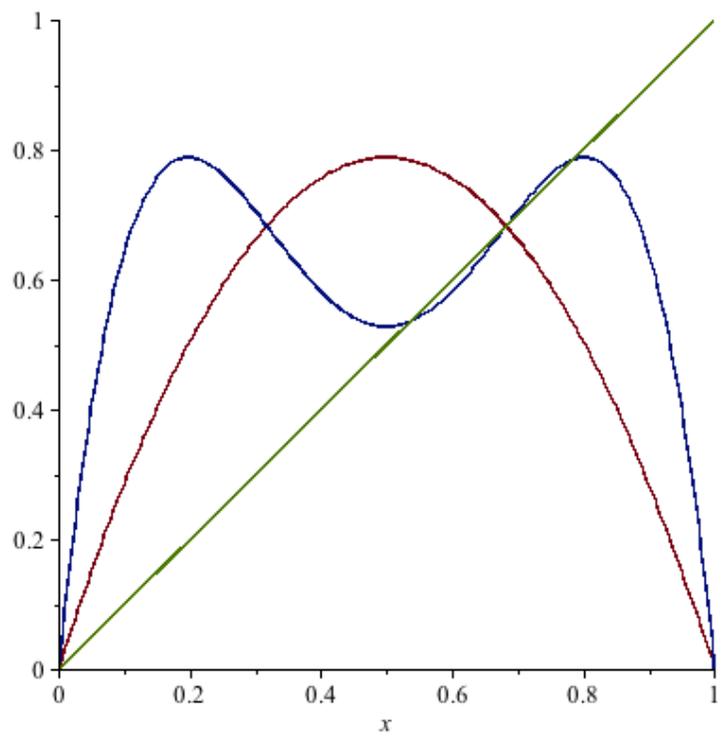


Abbildung 5: Periodische Punkte von $g_{3,15}$ und $g_{3,15}^2$

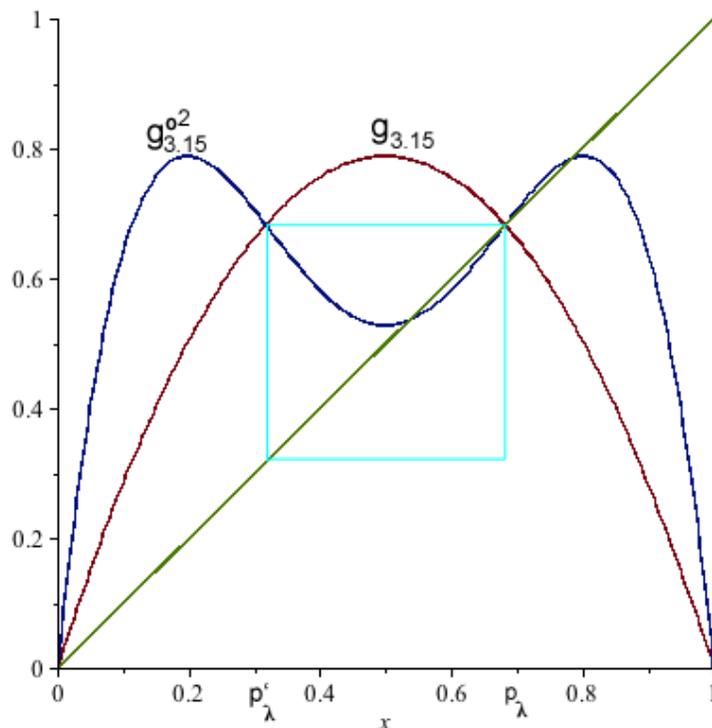


Abbildung 6: Ähnlichkeit von $g_{3.15}$ und $g_{3.15}^2$

genug bewerten.

Als Einführung in diese Ideenwelt stelle ich als erstes mal einen Renormierungsoperator vor, der (auch) auf unserer logistischen Übergangsfamilie arbeitet. Dazu ziehen wir die Abbildung 5 heran und zeichnen einige zusätzliche Hilfslinien ein, was Abbildung 6 ergibt. Mit $p_\lambda := \frac{\lambda-1}{\lambda}$ bezeichnen wir den Fixpunkt von $g_{3.15}$, also den mittleren Schnittpunkt der roten und grünen Linie, in Zahlen $p_\lambda = 0.6825\dots$. Als Zweites verwenden wir $p'_\lambda = \frac{1}{\lambda}$; dies ist der zweite Schnittpunkt der roten und blauen Linie auf der linken Seite bei $0.31746\dots$. p'_λ wird von g_λ auf den Fixpunkt p_λ abgebildet, anders ausgedrückt, p'_λ ist das zweite Urbild von p_λ unter g_λ . Das in Abbildung 6 eingezeichnete türkisfarbene Quadrat mit der Seitenlänge $p_\lambda - p'_\lambda$ enthält ein Kurvenstück von $g_{3.15}^2$, das, wenn man es an einer Waagrechten spiegelt und etwas daran dehnt und staucht, der Kurve von $g_{3.15}$ stark ähnelt. Um dies etwas mathematischer auszudrücken, definieren wir einen Renormierungsoperator. Dazu sei zunächst eine lineare Abbildung $L_\lambda(x)$ definiert:

$$L_\lambda(x) := \frac{1}{p'_\lambda - p_\lambda}(x - p_\lambda) \text{ für } x \in [p'_\lambda, p_\lambda].$$

Damit das Intervall $[p'_\lambda, p_\lambda]$ nicht leer ist, soll $\lambda > 2$ sein (dann ist nämlich $p'_\lambda = \frac{1}{\lambda} < \frac{\lambda-1}{\lambda} = p_\lambda$). L_λ bläst dieses Intervall auf das Einheitsintervall auf und invertiert es: $L_\lambda(p'_\lambda) = 1, L_\lambda(p_\lambda) = 0$. Die Umkehrabbildung lautet dann:

$$L_\lambda^{-1}(x) := (p'_\lambda - p_\lambda) \cdot x + p_\lambda$$

mit $x \in [0, 1]$. Jetzt kann man einen ersten Typ von Renormierungsoperator definieren.

Definition 5

(Renormierungsoperator Typ 1)

Sei $\lambda > \Lambda_1 (= 3.23\dots)$ und erfülle andererseits λ die Ungleichung $\frac{\lambda^3}{4}(1 - \frac{\lambda}{4}) \geq 1$. Die Funktion

$$Rf_\lambda(x) := L_\lambda \circ f_\lambda^2 \circ L_\lambda^{-1}(x)$$

für $x \in [0, 1]$ heißt Renormierungsoperator von f_λ .

Eine insoweit etwas merkwürdige Bezeichnung, als tatsächlich f_λ^2 renormiert wird. Die zweite Ungleichung kann man nach λ auflösen und erhält eine obere Grenze für λ von 3.67857... Damit bewegt sich der Renormierungsoperator im durchaus interessanten Bereich der Periodenverdopplung der Periode 2^k , die bekanntlich beim Feigenbaumpunkt $\lambda_{2^\infty} = 3.5699\dots$ endet. Lassen wir das mal zeichnen. Abbildung 7 zeigt für $\lambda = 3.3$ und Abbildung 8 für $\lambda = \Lambda_2 = 3.4985617\dots$ die Funktionen $g_{3.3}, g_{3.3}^2, id$ und $Rg_{3.3}$ in den Farben rot, blau, grün und gelb.

Satz 5

- (a) $Rf_\lambda(0) = 0$ und $Rf_\lambda(1) = 0$
- (b) $(Rf_\lambda)'(\frac{1}{2}) = 0$ und $\frac{1}{2}$ ist einziger kritischer Punkt von Rf_λ
- (c) Rf_λ ist S-unimodal
- (d) Sei f_λ (unimodal und) superstabil (für dieses λ), dann ist auch Rf_λ (unimodal und) superstabil und die (als geradzahlig angenommene) Periode von f_λ^2 wird halbiert.

Wir sehen alle diese Eigenschaften in Abbildung 8 (bis auf die Schwarzsche Ableitung).

Ein zweiter Typ von Renormierungsoperator bezieht sich auf einen kleineren Ausschnitt des Intervalles $[0, 1]$. Dafür benötigen wir wieder einmal die Abstände

$$d_n = f_{\Lambda_n}^{2^{n-1}}(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2},$$

Schnittpunkt eines Astes eines superstabilen Orbits ($\frac{1}{2}$) zum nächstgelegenen Iterationswert. Der Renormierungsoperator vom Typ 2 definiert sich ebenfalls über eine lineare Transformation \mathcal{L}_λ , die ich zum Unterschied von Typ 1 mit \mathcal{L} bezeichnen will. Sei also

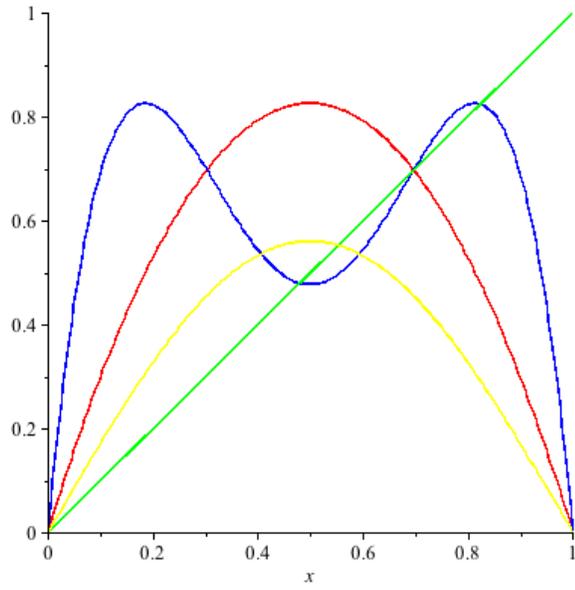


Abbildung 7: Renormierungsoperator Typ 1 für $\lambda = 3.3$

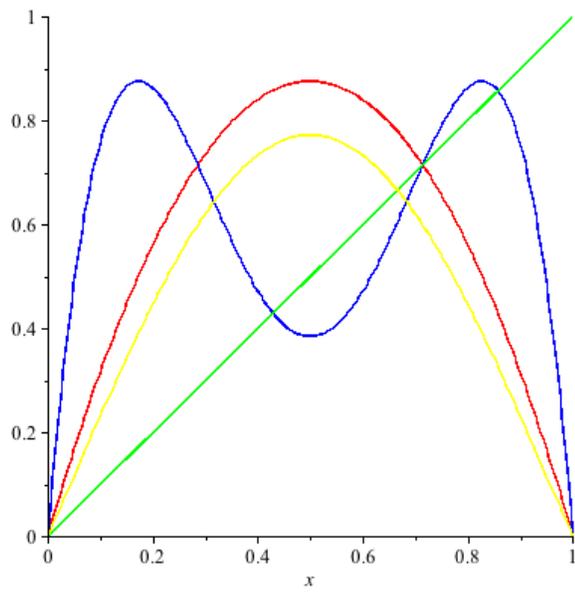


Abbildung 8: Renormierungsoperator Typ 1 für $\lambda = \Lambda_2$

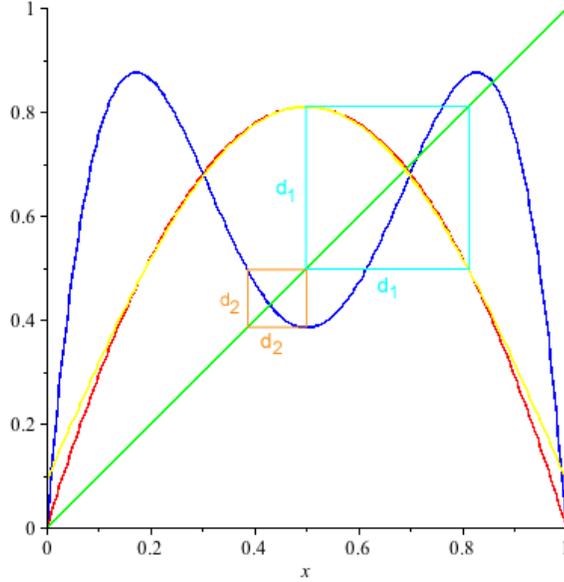


Abbildung 9: Renormierungsoperator Typ 2 für $\lambda = \Lambda_2$

$$\mathcal{L}_{\Lambda_2}(x) := \frac{d_1}{d_2} \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \text{ für } x \in \left[\frac{1}{2} + d_2, \frac{1}{2}\right]$$

und

$$\mathcal{L}_{\Lambda_2}^{-1}(x) := \frac{d_2}{d_1} \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \text{ für } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + d_1\right].$$

Dann wird $\mathcal{R}f_\lambda$ für Λ_2 wie oben gebildet:

$$\mathcal{R}f_{\Lambda_2}(x) := (\mathcal{L})_{\Lambda_2} \circ f_{\Lambda_2}^2 \circ \mathcal{L}_{\Lambda_2}^{-1}(x) \text{ für } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + d_1\right]$$

Was haben wir jetzt geschaffen? Dieser zweite Renormierungsoperator schafft es, f_{Λ_2} in seinem Definitionsbereich $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + d_1]$ auf f_{Λ_1} exakt abzubilden! Also

$$f_{\Lambda_1} \approx \mathcal{R}f_{\Lambda_2}$$

Das sehen wir uns in Abbildung 9 und 10 an. Eigentlich ist Abbildung 9 nicht korrekt, da hier das gesamte Intervall $[0, 1]$ gezeichnet wurde, aber es soll deutlich werden, welcher Ausschnitt in 10 dargestellt wird.

In beiden Abbildungen ist die rote Kurve g_{Λ_1} , die blaue $g_{\Lambda_2}^2$ und die gelbe die Renormierung $\mathcal{R}f_{\Lambda_2}$. Das türkisfarbene Quadrat mit der Seitenlänge d_1 ist der in Abbildung 10 wiedergegebene Ausschnitt und gleichzeitig der Definitionsbereich und Wertebereich von $\mathcal{R}g$. Das ockerfarbene Quadrat mit der Seitenlänge d_2 schließt den Ausschnitt von $g_{\Lambda_2}^2$ ein, der tatsächlich renormiert wird. Praktisch wird der blaue Graf in diesem Quadrat gedreht und in $(d_1)^2$ hineingedehnt.⁵

⁵Es sei daran erinnert, dass die d_n alternierendes Vorzeichen haben und betragsmäßig immer kleiner werden.

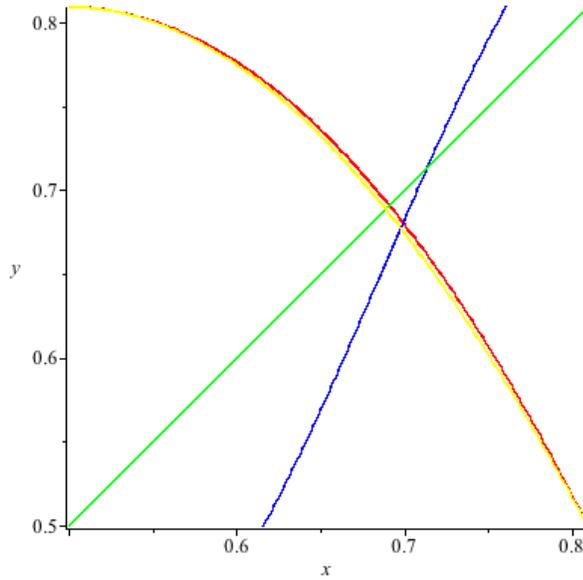


Abbildung 10: Ausschnitt Renormierungsoperator Typ 2 für $x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 0.3090]$

Dieser Renormierungstyp 2 lässt sich auf superstabile f_{Λ_n} verallgemeinern, indem man bei der Definition des \mathcal{L}_λ jeweils den Faktor $\frac{d_{n-1}}{d_n}$ statt $\frac{d_1}{d_2}$ verwendet.

Dies ist die Stelle an der alle Autoren spätestens die logistische Gleichung (als Beispiel) verlassen und mittels einer umkehrbaren Transformation zu einer anderen unimodalen Funktion wechseln, die zwei Unterschiede zur log. Gleichung hat: Die Funktion ist symmetrisch zur y-Achse und hat das Maximum (kritischen Punkt) bei 0. Dies ist letztlich eine Normierung, die gewisse Umformungen vereinfacht. Mir sind zwei Transformation untergekommen. Im Buch von Metzler [1] wird eine sog. Konjugation verwendet:

$$\varphi(x) := 2x - 1, x \in [0, 1]$$

Damit wird aus g die Abbildung $G = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ auf $[-1, 1]$; eingesetzt ergibt sich $\frac{1}{2}\lambda(1 - x^2) - 1$: Es gilt: $G(0) = \frac{1}{2}\lambda - 1, G(1) = G(-1) = -1$. Abbildung 11 zeigt diese Kurven für $\lambda = 1, 2,$ und 4 .

Die zweite Methode findet sich im Aufsatz von Kirchgraber und Sigrist [4]. Hier wird, ähnlich wie bei der Transformation auf die logistische Gleichung (siehe Anhang (3)) eine Koordinatentransformation gemacht. Den Operator

$$S(x) := (\frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{2})x + \frac{1}{2}, \lambda \in (2, 4]$$

S wendet man auf die Iterierten x_{n+1} und x_n an und bekommt:

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2 \text{ mit } \mu = \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda}{2}$$

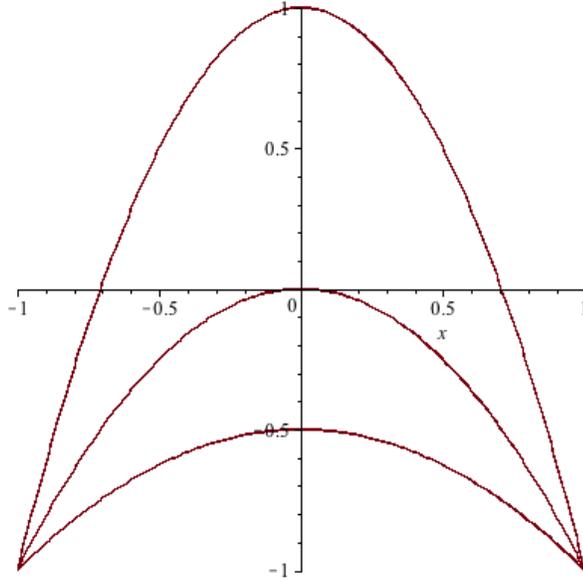


Abbildung 11: Transformation mittels Konjugation

Die Funktion $\mathcal{G}(x) = 1 - \mu x_n^2$ hat ebenfalls die y-Achse zur Symmetrieachse und den zusätzlichen Vorteil, dass $\mathcal{G}(0) = 1$, also unabhängig von μ ist. Dafür hängen jetzt die Funktionswerte der Intervallgrenzen von μ ab: $\mathcal{G}(-1) = \mathcal{G}(1) = 1 - \mu$. 0 ist ebenfalls kritischer Punkt. Abbildung 12 mit $\lambda = 2.5, 3$ und 4.

Letztlich ist es egal, welche Transformation man benutzt, beide Ergebnisse sind unimodale Funktionen. Ich werde auch je nach Zusammenhang im weiteren beide verwenden. Bei beiden Transformationen gilt nun, dass sich die Definition von $d_n = f_{\Lambda_n}^{2^{n-1}}(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$ ebenfalls „verschiebt“ zu $d_n = f_{\Lambda_n}^{2^{n-1}}(0)$.

Die folgende Darstellung findet man in verschiedenen Quellen, wie z.B. in [1], [2] oder [4]. Sie beschreibt das Vorgehen von Mitchell Feigenbaum bei dessen Untersuchungen mittels Renormierung und den Weg zu den beiden Feigenbaumkonstanten. Dazu definierte Feigenbaum seinen Renormierungsoperator T_n (nennen wir ihn Typ 3):

$$T_n f_{\Lambda_n}^{2^{n-1}} := \frac{d_n}{d_{n+1}} f_{\Lambda_{n+1}}^{2^n} \left(x / \frac{d_n}{d_{n+1}} \right)$$

Meine Güte, die Anzahl der Sub- und Superskripte hat die Grenze der Übersichtlichkeit aber auch überschritten. Das hat sich Feigenbaum wohl auch gedacht und, ein paar Grenzübergänge später, sind die alle weg, die Indices. Wie geht das? Nun, zunächst fällt auf, dass die Bezeichnungsweise hier im Gegensatz zur Definition des Typs 2 trotz allem nicht ganz sauber ist. T_n wird auf $f_{\Lambda_n}^{2^{n-1}}$ angewendet, das taucht aber auf der rechten Seite der Definition gar nicht mehr auf, sondern vielmehr f an der Stelle Λ_{n+1} . Aber diese Definition rechtfertigt sich aus dem tatsächliche Vorgehen beim Anwenden von T_n :

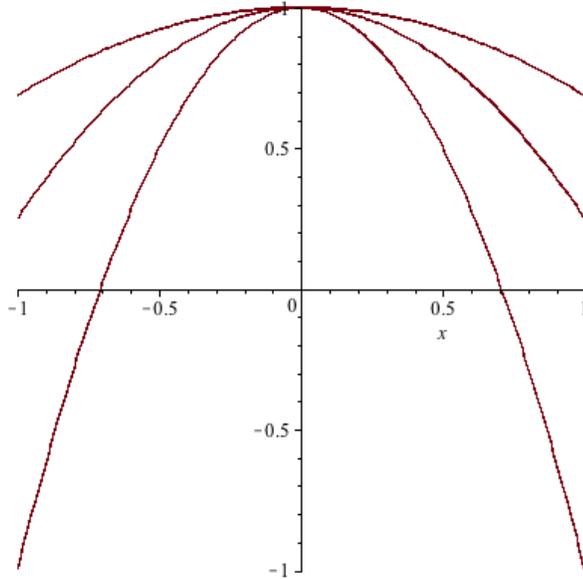


Abbildung 12: Transformation mittels Koordinatentransformation

- Bei $f_{\Lambda_n}^{2^{n-1}}$ wird zunächst die Periode verdoppelt: $f_{\Lambda_n}^{2^n} = f_{\Lambda_n}^{2^{n-1}} \circ f_{\Lambda_n}^{2^{n-1}}$
- Dann wird λ von Λ_n auf Λ_{n+1} verschoben.
- Als letztes wird renormiert: $\frac{d_n}{d_{n+1}} f_{\Lambda_{n+1}}^{2^n}(x/\frac{d_n}{d_{n+1}})$

Das bedeutet für den Fall $n=1$ beispielsweise, dass genau wie beim Typ 2 der Operator $T_1 f_{\Lambda_1}(x) = \frac{d_1}{d_2} f_{\Lambda_2}(x/\frac{d_1}{d_2})$ das Quadrat $[d_2, 0] \times [d_2, 0]$ mit der Seitenlänge d_2 auf $[0, d_1]$ aufbläst⁶ mit entsprechender Renormierung des Kurvenstücks von $f_{\Lambda_2}^2$, siehe dazu Abbildung 9.

Der Operator T_n wird von Feigenbaum nun nacheinander angewendet, also

$$T_2(T_1 f_{\Lambda_1}(x)) = \frac{d_2}{d_3} \frac{d_1}{d_2} f_{\Lambda_3}^{2^2}(x/\frac{d_1}{d_2} \frac{d_2}{d_3}) = \frac{d_1}{d_3} f_{\Lambda_3}^{2^2}(x/\frac{d_1}{d_3}).$$

Dies treibt die Renormierung einen Schritt weiter, das d_3 -Quadrat wird auf d_1 renormiert usw.

An dieser Stelle „verschlechtern“ wir jetzt zunächst den Renormierungsoperator T_n indem die $\frac{d_{n-1}}{d_n}$ durch eine noch zu bestimmende Zahl $-\alpha$ ersetzt werden und definieren Funktionen⁷ $g_{n,\Lambda_k}(x)$ auf $[-1,1]$:

⁶Durch die Verschiebung des kritischen Punktes von f und damit f selber, wird aus dem Intervall $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + d_1]$ vermittels $\varphi(x)$ das Intervall $[0, d_1]$. Gleiches gilt für das Quadrat $[d_2, 0] \times [d_2, 0]$.

⁷Ich verwende hier für die zu definierenden Funktionen den Buchstaben g , der eigentlich unsere logistische Gleichung beschrieb.

$$\begin{aligned}
g_{1,\Lambda_1}(x) &:= T_1 f_{\Lambda_1}(x) = -\alpha f_{\Lambda_2}^2(x/\alpha) \\
g_{2,\Lambda_1}(x) &:= T_2(T_1 f_{\Lambda_1})(x) = T_2(-\alpha f_{\Lambda_2}^2(x/\alpha)) = (-\alpha)^2 f_{\Lambda_3}^2(x/(-\alpha)^2) \\
&\quad \dots \\
g_{n,\Lambda_1}(x) &:= T_n(g_{n-1,\Lambda_1}(x)) = (-\alpha)^n f_{\Lambda_{n+1}}^{2^n}(x/(-\alpha)^n)
\end{aligned}$$

und allgemeiner für Λ_k :

$$g_{n,\Lambda_k}(x) = (-\alpha)^n f_{\Lambda_{n+k}}^{2^n}(x/(-\alpha)^n)$$

Und jetzt geht's in die Grenzübergänge. Dies führt zu Grenzfunktionen $g_n(x)$, die Konvergenz wird als gleichmäßig angenommen:

$$g_1(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_{n,\Lambda_1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{\Lambda_{n+1}}^{2^n}(x/(-\alpha)^n)$$

Entsprechend für $k > 1$:

$$g_k(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_{n,\Lambda_k}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{\Lambda_{n+k}}^{2^n}(x/(-\alpha)^n)$$

Aufgrund der Eigenschaften von $f_{\Lambda_{n+k}}^{2^n}$ und zusätzlicher Annahmen sind die g_k superstabil mit der Periode 2^k und es gilt $g_k(0) > 0$. Man führe sich nochmals vor Augen, dass alle g_{n,Λ_k} und damit auch alle g_k durch die Renormierung auf dem gleichen Intervall um 0 operieren. Was bringen nun die g_k ?

Satz 6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha$$

Der Beweis nutzt die Definition von g_1 incl. der Aussage über die Konvergenz der Funktionenfolge. Also:

$$\frac{(-\alpha)^{n-1} f_{\Lambda_n}^{2^{n-1}}(0/(-\alpha)^{n-1})}{(-\alpha)^n f_{\Lambda_{n+1}}^{2^n}(0/(-\alpha)^n)} = \frac{(-\alpha)^{n-1} d_n}{(-\alpha)^n d_{n+1}} \rightarrow \frac{g_1(0)}{g_1(0)} = 1$$

mit der obigen Redefinition von d_n und $g_1(0) > 0$. \square

Damit haben wir nun endlich die Aussage über die Größe von α , der ersten Feigenbaumkonstante. Gleichzeitig erahnt man auch schon ihre Bedeutung in Zusammenhang mit der Renormierung. Der nächste Satz stellt nun den Zusammenhang zwischen den g_k her und definiert einen von n unabhängigen Renormierungsoperator.

Satz 7

Für $k = 1, 2, 3, \dots$ gilt:

$$g_{k-1}(x) = (-\alpha)g_k(g_k(x/(-\alpha)))$$

wobei sich einerseits hierdurch $g_0(x)$ als $-\alpha g_1^2(x/\alpha)$ definiert und andererseits $Tg_k(x) := (-\alpha)g_k(g_k(x/(-\alpha)))$.

Auf zum nächsten Grenzübergang. Jetzt lassen wir in der Gleichung $g_{k-1}(x) = Tg_k(x)$ k gegen ∞ gehen und erhalten eine Funktion $g(x)$, die dann ein Fixpunkt der Gleichung

$$g(x) = Tg(x) = -\alpha g(g(x)/(-\alpha))$$

ist. Schließt man die triviale Lösung $g \equiv 0$ aus, bleibt ein $g(x)$ übrig, das mit $g(x)$ auch $-\alpha g(x)/(-\alpha)$ als Lösung der Fixpunktgleichung hat. Um hier Eindeutigkeit zu erzielen, legt man fest $g(0) = 1$ und rechnet dann:

$$1 = g(0) = -\alpha g(g(0)) = -\alpha g(1), \text{ also } \alpha = -\frac{1}{g(1)}$$

Der erste Paukenschlag! So ließe sich dann α berechnen, wenn man denn g kennen würde. Und genau das ist der Kasus Knacktus. Feigenbaum hat mittels eines numerischen Ansatzes eine Näherungslösung bestimmt und die wollen wir uns ansehen. Es soll nochmals darauf hingewiesen werden, dass Feigenbaum selber keine Beweise seiner Hypothesen geführt hat, aber er war der erste, der folgende Aussagen vermutet hat:

Satz 8

1. Der Verdopplungsoperator T hat einen Fixpunkt $g(x) \in C^\infty[-1, 1]$, der unimodal, symmetrisch zur y -Achse und durch $g(0)=1$ normiert ist.
2. Die Linearisierung DT_g an der Stelle des Fixpunktes $g(x)$ (D im Sinne der Frechet-Differenzierbarkeit) hat genau einen Eigenwert $\delta > 1$, $\delta = 4.669\dots$. Alle anderen Eigenwerte von DT_g sind betragslich kleiner 1 (d.h. liegen in der komplexen Ebene innerhalb des Einheitskreises).
3. $\lambda_{-2_\infty} = \Lambda_{-2_\infty}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Lambda_{-2_\infty} - \Lambda_n) \cdot \delta^n = K > 0$, mit einer Konstante K .

Und das sind der zweite und der dritte Paukenschlag! Die zweite Hypothese enttarnt nun endlich das schon als Grenzübergang der Intervallgrenzen λ_k vermutete

$$\delta := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_n - \Lambda_{n-1}}{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}$$

und die dritte stellt den Zusammenhang zu λ_{-2_∞} her. Damit sind beide Feigenbaumkonstanten und λ_{-2_∞} mit g bzw. T verbunden.⁸

Bleibe also „nur noch“ g zu bestimmen. Dazu findet man im Aufsatz von Kirchner Sigrist [4] einen Ansatz, den ich in Maple umgesetzt habe. Der Fixpunkt, also die Funktion g , ist zwar einerseits kein Polynom, denn wenn man T auf ein Polynom anwendet, quadriert sich der Grad. Aber man kann wegen der Forderung g sei C^∞ eine Entwicklung in eine Potenzreihe ansetzen, die man natürlich für numerische Berechnungen wieder abbrechen muss; beißt sich die Katze hier in den Schwanz? Wir sind ja nur an einer numerischen Näherung für g interessiert, deshalb ist ein Ansatz $g(x) \approx 1 + \sum_{k=1}^n a_k x^{2k}$ durchaus gerechtfertigt.

⁸Dabei sind α und δ universelle Konstanten - im Sinne unimodaler Abbildungen - λ_{-2_∞} hängt von der Übergangsfamilie ab, da dies ja auch die λ_n bzw. die Λ_n tun.

Wendet man nun T drauf an, erhält man wie schon gesagt ein Polynom vom Grade $4n^2$, bei dem man kurzerhand die Potenzen, die größer sind als $2n$ einfach weglässt. Die Koeffizienten müssen ohnehin immer kleiner werden (was sie auch tun, wie wir sehen werden) und so kann man hoffen, eine Näherung für g zu erhalten. Wenn man nun mit dem starken Werkzeug Maple 17 naiv an dieses Problem herangeht, so zeigen sich schnell Grenzen durch die hohe Komplexität der Koeffizienten des Polynoms, die lange Rechenzeiten nach sich ziehen.⁹ Also muss man sich was Intelligenteres einfallen lassen. Kirchgraber Sigrist schlagen statt dessen ein Newtonverfahren vor und geben Koeffizienten bis $n=10$ an. Wie sieht das genau aus?

Ich verwende für die Näherungspolynome den Buchstaben p_n , weil g_n oben schon im Zusammenhang mit Renormierungen benutzt wurde. Also:

$$p_n(x) := 1 + \sum_{k=1}^n a_k x^{2k}$$

Die Fixpunktgleichung lautet nun:

$$p_n(x) = T p_n(x) = -\alpha p_n(p_n(x)/(-\alpha)) \text{ mit } \alpha = -\frac{1}{p_n(1)}$$

Setzt man jetzt die endliche Summe ein, so liefert, wie schon gesagt die rechte Seite auch Potenzen größer $2n$ mit Koeffizienten, nennen wir sie b_k . Im Sinne eines Koeffizientenvergleiches der beiden Polynome links und rechts der Gleichung setzen wir die Koeffizienten b_k mit k größer n auf Null und erhalten damit n nichtlineare Gleichungen für die a_k . Um das Weglassen der Potenzen kenntlich zu machen, benutze ich einen Operator, den ich τ_n nenne und der auf einen n -dimensionalen Vektor \vec{a} angewendet wird.

Beispiele:

Für $n=1$ ist zu lösen:

$$1 + a_1 x^2 = \frac{1}{1 + a_1} (1 + a_1 (1 + a_1 x^2 (1 + a_1)^2)^2) = 1 + (2a_1^3 + 2a_1^2) x^2 [+O(x^4)]$$

oder mittels τ_1 geschrieben:

$$\vec{a} = \tau_1(\vec{a}) \text{ und } \vec{a} := (a_1),$$

oder (den Koeffizientenvergleich gleich hingeschrieben) $(a_1) = (2a_1^3 + 2a_1^2)$ mit den Lösungen 0 und $-\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$; zulässig ist nur die negative Lösung, da die Lösungsfunktion sonst nicht unimodal wäre. Abbildung 13 zeigt, wie gut die Näherung bereits ist.

Für $n=2$ ist zu lösen:

$$1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 = \frac{1}{1 + a_1 + a_2} (1 + a_1 (1 + a_1 x^2 (1 + a_1 + a_2)^2)^2 + a_2 (1 + a_1 x^2 (1 + a_1 + a_2)^2)^4)$$

⁹Ein Versuch mit fsolve das auftretende nichtlineare Gleichungssystem zu lösen geht noch gerade bis $n=5$.

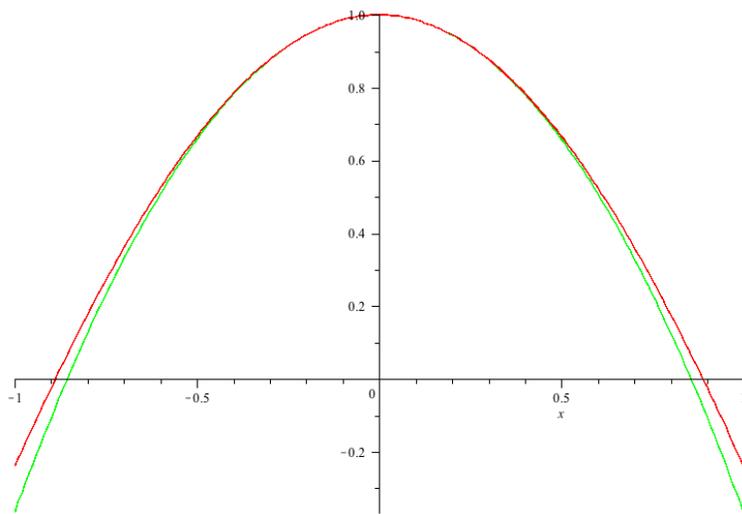


Abbildung 13: p_1 (grün) und Tp_1 (rot)

[+ ganz viele Terme höherer Ordnung von x].

Mit τ_2 geschrieben steht dann da:

$$(a_1, a_2)^T = \tau_2((a_1, a_2)^T) = (2a_1(a_1 + 2a_2)(1 + a_1 + a_2), (a_1^3 + 6a_1^2a_2 + 2a_1a_2 + 4a_2^2)(1 + a_1 + a_2)^3)^T$$

Eine numerische Lösung liefert $a_1 = -1.5222415617792405850$ und $a_2 = 0.12761325721150426506$ (siehe Abbildung 14).

Jetzt aber weiter zum Newtonverfahren. Um die „numerische Fixpunktgleichung“ $\tau_n(\vec{a}) = \vec{a}$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)^T$ mit Newton zu lösen, muss man sie zunächst in eine Nullstellengleichung umformen: $0 = \tau_n(\vec{a}) - \vec{a} = (\tau_n - I)(\vec{a})$. Dann bildet man die Jacobi-Matrix der Funktion, dessen Nullstelle man sucht: $D(\tau_n - I)(\vec{a}) = D\tau_n(\vec{a}) - I$ und invertiert sie: $(D\tau_n(\vec{a}) - I)^{-1}$ und kann sie nun in die Newtonsche Iterationsformel einsetzen (i ist der Iterationsindex):¹⁰

$$\vec{a}_{i+1} = \vec{a}_i - (D\tau_n(\vec{a}_i) - I)^{-1}(\tau_n - I)(\vec{a}_i) = \vec{a}_i + (D\tau_n(\vec{a}_i) - I)^{-1}(\vec{a}_i - \tau_n(\vec{a}_i)).$$

Es bleibt die Frage nach dem Startwert \vec{a}_0 . Kirchgraber Sigris nehmen für die a_k jeweils die Endergebnisse der vorherigen Berechnung, also für ein kleineres m bei τ_m . Die restlichen a_k für $k > m$ werden auf Null gesetzt. Dies ist eine gute Idee, da sich die Werte der a_k mit steigendem m zwar ändern, aber nur gering. Mein Ergebnis für n=10 ist nun das folgende:¹¹

k	a_k	abs. Abstand zur vorherigen It.
1	-1.5276329945327820672	-7 e-17
2	0.10481518626794890092	2 e-16
3	0.026705682917532098606	-1 e-16
4	-0.0035274234357066046519	9 e-17
5	0.000081613092644532145289	-7 e-17
6	0.000025276611721970076081	5 e-18
7	-0.0000025515233318361009154	-9 e-19
8	-9.8745592930760118262 e-8	1 e-19
9	2.9058933584161161044 e-8	-7 e-21
10	-5.5826183932769812520 e-10	3 e-22
a_k für τ_{10}		

Auch hier habe ich die genäherte Fixpunktfunktion p_{10} und Tp_{10} zeichnen lassen, siehe Abbildung 15. Man sieht nur die rot gezeichnete Funktion Tp_{10} , da sie von Maple als zweites gezeichnet wurde und so die grüne Kurve überlagert hat.

¹⁰Bei Kirchgraber und Sigris liegt in der Formel für das Newtonverfahren ein Schreibfehler vor; es fehlt das Subskript am zweiten τ .

¹¹Bei Kirchgraber und Sigris fehlt das Minuszeichen bei a_{10}

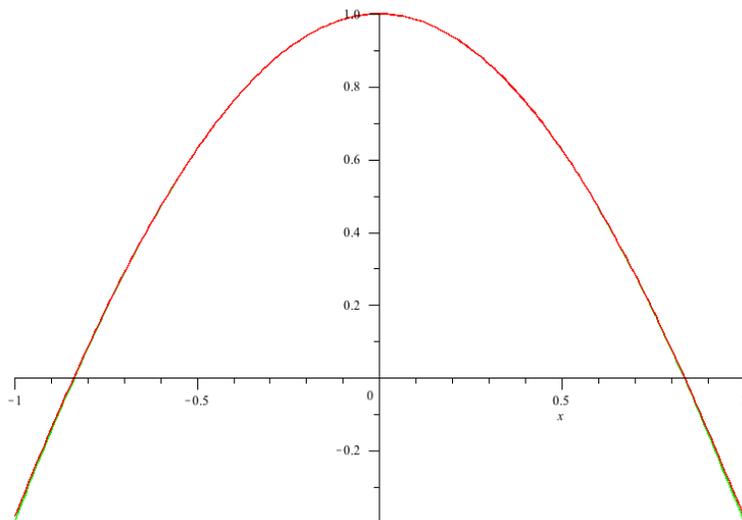


Abbildung 14: p_2 (grün) und Tp_2 (rot)

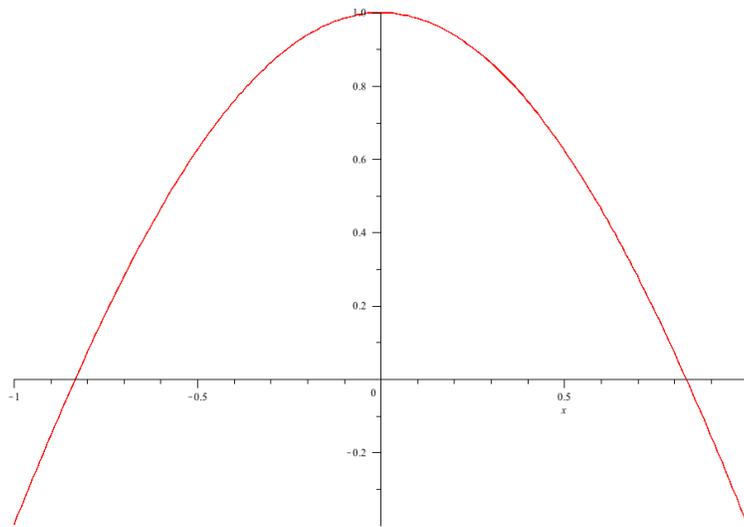


Abbildung 15: p_{10} (grün, überlagert) und Tp_{10} (rot)

Jetzt müssten wir auch α und δ näherungsweise berechnen können. Für α berechnet man aus $-\frac{1}{p_{10}(1)}$ den Wert

$$\alpha = 2.5029078730676846833.$$

Um δ bestimmen zu können, muss man laut Feigenbaums zweiter Hypothese die Eigenwerte von $D\tau_n(\vec{a})$ (\vec{a} bezeichne hier das letzte Ergebnis der Newtoniterationen) ermitteln; auch dies tut Maple für mich, es berechnet:

```
0.025793690804212676399
0.15963033704309624021
4.6692015933429105619
0.0084427920483452608525+0.0021137695333954625232 i
-0.0035571967525110494055
-0.0099226205642911947730
-0.057301679593082219674
-0.12364788840259115618
-0.23997344496175794377
0.0084427920483452608525-0.0021137695333954625232 i
```

Tatsächlich ist nur ein Eigenwert betragsmäßig größer 1 und das ist ja gerade δ .

$$\delta = 4.6692015933429105619$$

Daraus kann man nun näherungsweise wiederum $\lambda_{-2\infty}$ mit folgender Herleitung berechnen [6]:

$$\begin{aligned} (\lambda_{-2\infty} - \lambda_n) &= \\ (\lambda_{-2\infty} - \lambda_{n+1}) + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) &= \\ \dots + (\lambda_{n+3} - \lambda_{n+2}) + (\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}) + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) &\approx \\ \left(\dots + \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta} + 1\right) \cdot (\lambda_{n+1} - \lambda_n) &= \\ \frac{\delta}{\delta-1} \cdot (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \end{aligned}$$

Dort wo das \approx - Zeichen steht, ist näherungsweise die Formel

$$\delta \approx \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

verwendet worden, die natürlich für große n immer besser wird. Die sich ergebende geometrische Reihe konvergiert, da $\frac{1}{\delta} < 1$ ist. Insgesamt haben wir:

$$\lambda_{-2\infty} = \lambda_n + \frac{\delta}{\delta-1} \cdot (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$$

Genau die gleiche Herleitung klappt für die großen Λ :

$$\Lambda_{-2\infty} = \Lambda_n + \frac{\delta}{\delta-1} \cdot (\Lambda_{n+1} - \Lambda_n) (= \lambda_{-2\infty})$$

Mit den im Laufe dieses Aufsatzes bestimmten $\lambda_i, i = 2$ und 3 und $\Lambda_i, (i = 1$ und $2)$ und unserem δ rechnen wir mal los und erzielen:

$$\begin{aligned} \lambda_{-2\infty} &= 3.569872704\dots \\ &\text{und} \\ \Lambda_{-2\infty} &= 3.570101437\dots \end{aligned}$$

Da beide Grenzwerte gleich sind, kann man hoffen mit dem Mittelwert ein noch genaueres Ergebnis zu ermitteln:

$$\lambda-2_\infty = \Lambda-2_\infty = 3.569987070\dots$$

Gegenüber einem als exakter angegebenen Wert von 3.5699456... beträgt die Abweichung nur 0,001 Prozent. In dem Buch von Metzler [1] wird auch ein auf Feigenbaum zurückgehendes Iterationsverfahren beschrieben, mit dem die Λ_n und δ berechnet werden können. Dies möchte ich zum Abschluss dieses Anhangs noch kurz vorstellen.¹² Dabei handelt es sich eigentlich um 2 ineinander geschachtelte Iterationen. Generell werden die beide Iterationen in folgender Weise berechnet:

$$\Lambda_{n+1} := \Lambda_n + \frac{\Lambda_n - \Lambda_{n-1}}{\delta_n} \text{ mit den Startwerten } \Lambda_0 = 2 \text{ und } \Lambda_1 = 1 + \sqrt{5}$$

und

$$\delta_n := \frac{\Lambda_{n-1} - \Lambda_{n-2}}{\Lambda_n - \Lambda_{n-1}} \text{ mit dem Startwert } \delta_1 := 4$$

Beide Iterationsgleichungen sind wie oben auch aus dem Grenzwert für δ hergeleitet. Um das Ergebnis noch zu verbessern, iteriert man nun „zwischen durch“ mit einem Newtonverfahren die einzelnen gerade berechneten Λ_{n+1} nach; die Grundlage dazu bildet die bekannte Beziehung:

$$f_{\Lambda_{n+1}}^{2^n}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \text{ bzw. } h(\lambda) := f_{\lambda}^{2^n}(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 0 \text{ als Bestimmungsgleichung.}$$

Das Newtonverfahren für Λ_{n+1} lautet dem gemäß:

$$\Lambda_{n+1}^{(k)} := \Lambda_{n+1}^{(k-1)} - \frac{h(\Lambda_{n+1}^{(k-1)})}{h'(\Lambda_{n+1}^{(k-1)})}$$

Dabei ist k der Iterationsindex des Newtonverfahrens ($k=1, 2, 3, \dots$) und der jeweilige Startwert $\Lambda_{n+1}^{(0)}$ ist gerade das soeben berechnete Λ_{n+1} . Als Abbruchbedingung eignet sich

$$\left| \frac{\Lambda_{n+1}^{(k)} - \Lambda_{n+1}^{(k-1)}}{\Lambda_{n+1}^{(k)}} \right| < eps$$

mit eps in der Nähe der Maschinengenauigkeit. Bleibt die Frage der Berechnung von $h(\lambda)$ und $h'(\lambda)$. Dies erinnert an die Zeichnung der Kurven $g^n(\lambda, \frac{1}{2})$ im Kapitel zu dem dieser Anhang gehört. Genau wie dort kann man eben durch Iteration $h(\lambda)$ berechnen:

$$x_0 := \frac{1}{2}, \quad x_{i+1} = g(\lambda, x_i) = \lambda \cdot x_i \cdot (1 - x_i), \quad i = 0..2^n - 1 \text{ und } h(\lambda) = x_{2^n} - \frac{1}{2}$$

Die zugehörige Ableitung kann man ebenfalls iterativ parallel dazu berechnen:¹³

$$x'_0 := 0, \quad x'_{i+1} = x_k \cdot (1 - x_k) + \lambda \cdot (1 - 2x_i) \cdot x'_i, \quad i = 0..2^n - 1 \text{ und } h'(\lambda) = x'_{2^n}$$

¹²Siehe dazu auch die ausführliche Darstellung in [10].

¹³Die totale Ableitung von $h(\lambda)$ ist $h'(\lambda) = x(1-x) + \lambda(1-2x) \frac{dx}{d\lambda}$

Fasst man das nun alles in ein Programm (ich habe Maple benutzt, da man dort sehr einfach die Genauigkeit ändern kann und mit $\text{Digits} := 30$ gerechnet).

n	Λ_n	δ_n
2	3.498561699327701520	4.708943013540503
3	3.554640862768824865	4.680770998010695
4	3.566667379856268514	4.662959611114103
5	3.569243531637110338	4.668403925918400
6	3.569795293749944621	4.668953740967623
7	3.569913465422348515	4.669157181328843
8	3.569938774233305488	4.669191002485096
9	3.569944194608064933	4.669199470547726
10	3.569945355486468581	4.669201134601042
11	3.569945604111078438	4.669201509513552
12	3.569945657358856500	4.669201587522386
13	3.569945668762899968	4.669201604512185
14	3.569945671205296855	4.669201608115935
15	3.569945671728383474	4.669201608892069
16	3.569945671840412610	4.669201609057759
17	3.569945671864405820	4.669201609093312
18	3.569945671869544431	4.669201609100913
19	3.569945671870644964	4.669201609102566
20	3.569945671870880664	4.669201609102831
Iterative Berechnung von Λ_n und δ		

Vergleichen wir nun die beiden Ergebnisse mit den offiziellen Werten,

$$\delta_{Eigenv} = 4.669201593342910$$

$$\delta_{iteriert} = 4.669201609102831$$

$$\delta_{offiziell} = 4.669201609102990$$

so sehen wir, dass der iterierte Wert um Einiges genauer ist, wobei der Aufwand zur Bestimmung erheblich geringer zu Buche schlägt.