1 Voraussetzungen im Telegrammstil

Begriff	Bezeichnung	Beispiel / Bemerkung
Zufallsexperiment	einstufig oder mehrstufig	Werfen eines Würfels
Ergebnis	ω	$\omega = 2$
Ergebnisraum	Ω	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis	$A \subseteq \Omega, B, C, \cdots$	$A = \{2, 4, 6\}$
Ereignisraum	$\mathfrak{P}(\Omega)$	Potenzmenge von Ω
Elementarereignis	$\{\omega\}$	$\{2\}$
Wahrscheinlichkeit	$P(A) \in [0, 1]$	$P(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{2}$

Sprechweise: Ein Ereignis A tritt ein, wenn bei einem Zufallsexperiment ein Ergebnis $\omega \in A$ herauskommt.
Sprechweise: Zwei Ereignisse A und B treten (beide) ein, wenn das Ereignis $A \cap B$ eintritt, also ein Ergebnis $\omega \in A \cap B$ herauskommt.

Definition 1 *Disjunkte Ereignisse*
Zwei Ereignisse A und B heißen disjunkt (oder unverträglich), wenn $A \cap B = \{\}$.

Bemerkung: Elementarereignisse sind immer disjunkt.

2 Gebundene Ereignisse - bedingte Wahrscheinlichkeiten

2.1 Einstufige Zufallsexperimente

Wir betrachten nun zunächst einstufige Zufallsexperimente und betrachten die Ereignisse
$A = \{2, 4, 6\}$ = Es wird eine gerade Zahl gewürfelt, mit $P(A) = \frac{1}{2}$.
$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ = Die gewürfelte Zahl ist größer 1, mit $P(B) = \frac{5}{6}$.
$C = \{1, 3, 5\}$ = Die gewürfelte Zahl ist ungerade, mit $P(C) = \frac{1}{2}$.
Die angegebenen Wahrscheinlichkeiten werden nach Laplace durch „Anzahl der günstigen / Anzahl der möglichen Fälle“ bestimmt.
Jetzt werfen wir einmal den Würfel (Zufallsexperiment mit Ergebnisraum Ω) und erhalten ein Ergebnis, das das Ereignis A eintreten lässt (gerade Zahl gewürfelt). Wir interessieren uns nun für das Ereignis B mit dem Wissen, dass A eingetreten ist oder besser ausgedrückt unter der Bedingung oder Voraussetzung, dass A gilt. Da wir ein einstufiges Zufallsexperiment betrachten, werden ja nicht zwei Versuche nacheinander ausgeführt, sondern B wird unter der Bedingung, dass A gilt, betrachtet.[1] Dies schreibt man B/A (B unter der Bedingung A oder auch B gebunden an A).
Welche Wahrscheinlichkeit hat nun das gebundene Ereignis B/A, also $P(B/A)$=?.
Man fasst das Ereignis B/A als Ereignis eines anderen Zufallsexperimentes mit dem Ereignisraum $\Omega_A \subseteq \Omega$ auf; dabei besteht Ω_A aus den möglichen Ergebnissen von Ω, die das Ereignis A liefern können. Hier also $\Omega_A = \{2, 4, 6\}$. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(B/A)$ basiert nun also auf Ω_A und man erhält $P(B/A) = \frac{3}{3} = 1$.

[1] Eigentlich ist es nicht notwendig, A aus einem (vorgelagerten) Experiment zu bestimmen, es reicht die Annahme, dass A gilt.

Für C/A erhält man $P(C/A) = 0$.

Es gilt folgendes Aussage über zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten:

Satz 1 *zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten*
Für zwei Ereignisse A und B eines Ereignisraumes $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt für bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ und } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Wendet man diesen Satz auf obiges Beispiel an, ergibt sich:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\{2,4,6\})}{P(\{2,4,6\})} = 1 \text{ und } P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P(\{\})}{P(\{2,4,6\})} = 0$$

2.2 Stochastisch unabhängige Ereignisse

Für zwei Ereignisse A und B eines Zufallsexperimentes gilt im Allgemeinen $P(B/A) \neq P(B)$. Das Eintreten von A modifiziert die Wahrscheinlichkeit von B gegenüber dem unbeeinflussten B.

Definition 2 *Stochastische Unabhängigkeit*
Gilt (jedoch) $P(B/A) = P(B)$ (und damit auch $P(B/\overline{A}) = P(B)$), dann nennt man die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig.

Mit Satz 1 folgt unmittelbar:

Satz 2 *Kriterium*
(i) Mit $P(B/A) = P(B)$ gilt ebenfalls $P(A/B) = P(A)$.
(ii) Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, genau dann wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Noch eine Bemerkung zu disjunkten Ereignissen. Zwei Ereignisse A und B haben eine Wahrscheinlichkeit ungleich Null und seien disjunkt. Dann ist nach Definition 1 $P(A \cap B) = 0$. Darüber hinaus seien sie stochastisch unabhängig: $P(B/A) = P(A)$. Dann würde aus Satz 1 folgen:

$$0 = P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) \neq 0,$$

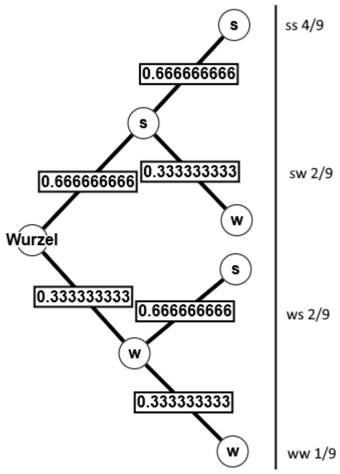
da weder $P(A)$ noch $P(B/A)$ null sein sollten. Dies ist widersprüchlich; es folgt: Disjunkte Ereignisse können nicht stochastisch unabhängig sein. Insbesondere sind Elementarereignisse nicht (paarweise) unabhängig.

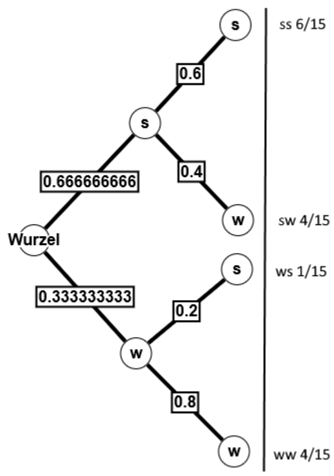
2.3 Mehrstufige Zufallsexperimente

Eines der typischsten mehrstufigen Zufallsexprimente ist das Ziehen farbiger Kugeln aus einer Urne. Dieses Experiment kann nämlich gebunden oder auch nicht gebunden durchgeführt werden.
Eine Urne enthalte beispielsweise 2 weiße und 4 schwarze Kugeln. Das Zufallsexperiment besteht nun darin eine Kugel zufällig aus der Urne zu ziehen. Dieses zunächst einstufige Experiment hat folgende Elemente:

$$\Omega = \{s, w\},\ \mathfrak{P}(\Omega) = \{\{\}, \{s\}, \{w\}, \{s, w\}\},\ P(\{s\}) = \frac{2}{3},\ P(\{w\}) = \frac{1}{3}$$

Führt man nun das Experiment ein zweites Mal durch, dann hat man 2 Möglichkeiten:
a) Man legt die gezogene Kugel in die Urne zurück
b) Die Kugel wird nicht zurückgelegt.
Im Fall a) handelt es sich um die zweimalige Durchführung des gleichen Experimentes, im Fall b) ändern sich die Randbedingungen des Experimentes aufgrund der ersten gezogenen Kugel, es liegen beim zweiten Experiment gebundenen Ereignisse vor.
Zur vollständigen Darstellung beider Fälle eignet sich sehr gut ein Wahrscheinlichkeitsbaum.





Ziehen mit Zurücklegen Ziehen ohne Zurücklegen
In einem Wahrscheinlichkeitsbaum stehen an den Kanten die Wahrscheinlichkeiten des Ergebnisses am Knoten des Kantenende des (einstufigen) Experimentes. Neben den von der Wurzel entferntesten Knoten stehen die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse des (mehrstufigen) Experimentes. Ihre Summe ist 1.
Um die Ergebnisse in die Wahrscheinlichkeitsdefinition einzuordnen, muss man das gesamte Experiment (beide Versuche) als Einheit betrachten, was bedeutet, dass die Ergebnismenge (in unserem Beispiel) 4 Elemente hat:

$$\Omega := \{ss, sw, ws, ww\}, |P(\Omega)| = 2^4 = 16$$

Wir betrachten die Ereignisse
$A :=$ beim ersten Ziehen wird Schwarz gezogen $= \{ss, sw\}$ und
$B :=$ beim zweiten Ziehen wird Schwarz gezogen $= \{ss, ws\}$.
Die Wahrscheinlichkeit von A ist $P(A) = \frac{2}{3}$ und für B $P(B) = \frac{2}{3}$.
Dabei ist B ein nicht gebundenes Ereignis. Es folgt weiter, dass $A \cap B = \{ss\}$ mit $P(A \cap B) = P(\{ss\}) = \frac{4}{9} = P(B/A)\,[= P(B)] \cdot P(A)$.
Im Fall des gebundenen Ereignisses B/A ist $P(B/A) = \frac{3}{5}$ und damit $P(A \cap B) = P(\{ss\}) = \frac{6}{15} = P(B/A) \cdot P(A)$. Die anderen Werte sind in den Wahrscheinlichkeitsbäumen ersichtlich.
Wir halten 2 Regeln für das Umgehen mit Wahrscheinlichkeitsbäumen fest:

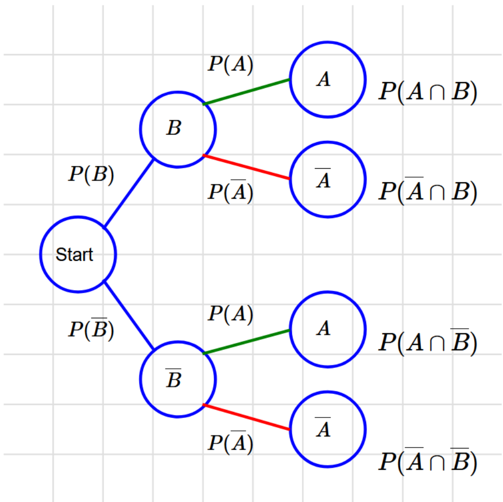
Satz 3 *Pfadregeln für Wahrscheinlichkeitsbäume*
(i) Produktregel / Und-Verknüpfung: Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarer-

eignisses eines (mehrstufigen) Zufallsexperimentes ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Kanten des zugehörigen Pfades (von der Wurzel zu dem das Elementarereignis repräsentierenden Knoten). Die Wahrscheinlichkeiten auf den Kanten entsprechen den (ggf. bedingten) Wahrscheinlichkeiten der einstufigen Zufallsexperimente.
(ii) Summenregel / Oder-Verknüpfung: Bei einem (mehrstufigen) Zufallsexperiment ist die Wahrscheinlichkeit eines (zusammengesetzten) Ereignisses gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse (rechts der Blätter des Wahrscheinlichkeitsbaumes).

Selbstverständlich gelten diese Regeln auch für weniger ausgewogene Bäume als in unserem Beispiel.

2.4 Unabhängigkeit und Wahrscheinlichkeitsbäume

Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse lässt sich auch an einem Wahrscheinlichkeitsbaum ablesen. Folgende Abbildung aus [1] stellt den Fall eines zweistufigen Zufallsexperiments dar, bei dem die Ereignisse in Knoten der gleichen Ebene komplementär sind (binärer Baum).



Es gilt nun:

Satz 4 *Unabhängigkeit im Baum*
Bei stochastischer Unabhängigkeit zweier Ereignisse hat jede in die gleiche Richtung zeigende Kante im Wahrscheinlichkeitsbaum die gleiche Wahrscheinlichkeit als Gewicht.

In obiger Abbildung sind dies die beiden grünen bzw. die beiden roten Kanten. Auch die beiden Beispielgraphen zur Urnenziehung zeigen dies. Wie in 2.2 schon erwähnt, folgt aus dieser Regel auch, dass mit der Unabhängigkeit von A und B auch $\overline{A}$ und B, A und $\overline{B}$, sowie $\overline{A}$ und $\overline{B}$ unabhängig sind.

[1] - www.mathebibel.de/stochastische-unabhaengigkeit