1 Voraussetzungen zur Logik im Telegrammstil

Begriff	Bezeichnung	Beispiel / Bemerkung
Wahrheitswerte	$true, false$	...
elementare logische Aussage	x, y, z	$x =$ „Der Rasen ist grün“
logische Operatoren	$and(\wedge), or(\vee), not(\neg)$	...
(zusammenges.) logische Aussdrücke	$X, Y, Z...$	$X := x \wedge y$
Konjunktion	log. Ausdruck mit and und not	$x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$
Disjunktion	log. Ausdruck mit or und not	$x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$

Rechenregeln der Boolschen Algebra

2 Voraussetzungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung im Telegrammstil

Begriff	Bezeichnung	Beispiel / Bemerkung
Zufallsexperiment	einstufig oder mehrstufig	Werfen eines Würfels
Ergebnis	ω	$\omega = 2$
Ergebnisraum	Ω	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis	$A \subseteq \Omega, B, C, \cdots$	$A = \{2, 4, 6\}$
Ereignisraum	$\mathfrak{P}(\Omega)$	Potenzmenge von Ω
Elementarereignis	$\{\omega\}$	$\{2\}$
Wahrscheinlichkeit	$P(A) \in [0, 1]$	$P(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{2}$

Sprechweise: Ein Ereignis A tritt ein, wenn bei einem Zufallsexperiment ein Ergebnis $\omega \in A$ herauskommt.
Sprechweise: Zwei Ereignisse A und B treten (beide) ein, wenn das Ereignis $A \cap B$ eintritt, also ein Ergebnis $\omega \in A \cap B$ herauskommt.

Definition 1 *Disjunkte Ereignisse*
Zwei Ereignisse A und B heißen disjunkt (oder unverträglich), wenn $A \cap B = \{\}$.

Bemerkung: Elementarereignisse sind immer disjunkt.

3 Disjunktive Normalform

Definition 2 *disjunktive Normalform*
Die disjunktive Normalform (DNF) eines logischen Ausdrucks X ist ein logisch äquivalenter Ausdruck der Form $\bigvee_i \bigwedge_j (\neg) x_{i,j}$, d.h. er besteht aus Konjuktionen, die mit or verknüpft sind.

Wie formt man einen log. Ausdruck in seine DNF um?
Rezept für die Umformung (Träger-Verfahren):
(i) Sei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der logische Ausdruck, der umzuformen ist.
(ii) Stelle eine Wahrheitstafel auf mit allen möglichen Wahrheitswerten für die x_i; das sind 2^n - viele Möglichkeiten.
(iii) Werte den Ausdruck f für alle diese Möglichkeiten aus.
(iv) Ist das Ergebnis true, dann wird diese Zeile für die DNF benötigt (sonst

für die KNF).
Bemerkung: Die Menge der true/false- Zeilen, die als Ergebnis true liefern, nennt man den Träger des boolschen Ausdrucks.
(v) Bilde für die Zeilen, die zur DNF gehören, eine Konjunktion aus den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ indem für eine Variable x_i, die in dieser Zeile mit false belegt ist, $\neg x_i$ in die Konjunktion eingesetzt wird, für ein true x_i. Die Variablen werden mit and verbunden. (Für die Bildung der KNF gilt das Umgekehrte, d.h. für false wird x_i, für true $\neg x_i$ eingesetzt und mit or verbunden).
(vi) Die gebildeten Ausdrücke der DNF-Zeilen werden mit or verknüpft (bei der KNF mit and).
(vii) Der Ausdruck kann gemäß den Regeln der Boolschen Algebra vereinfacht werden, allerdings ohne seinen DNF-Charakter zu verändern. Beispiel:
$X := (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$

t/f	t/f	t/f	Erg.	Kon-/Disjunktion
$false$	$false$	$false$	$false$	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
$false$	$false$	$true$	$false$	$x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$
$false$	$true$	$false$	$false$	$x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$
$false$	$true$	$true$	$true$	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
$true$	$false$	$false$	$false$	$\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3$
$true$	$false$	$true$	$true$	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$
$true$	$true$	$false$	$false$	$\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$
$true$	$true$	$true$	$true$	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$

Der Träger von f ist
$T(f) = \{\{false, true, true\}, \{true, false, false\}, \{true, true, true\}\}$
Ergebnisse:
$DNF = (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$
$KNF = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$
Wie man sieht, liefert dieses Verfahren nicht unbedingt die kürzeste Darstellung für eine DNF, denn wie man leicht sieht, ist $X = (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)$ ebenfalls eine DNF, die mit viel weniger Termen auskommt. Aber dieses Verfahren liefert etwas anderes, nämlich die sogenannte

Definition 3 *kanonische DNF*
Eine DNF bei der in jedem konjunktiven Term jede Variable genau einmal vorkommt (Negation erlaubt), heißt kanonische DNF.

Satz 1 *Eindeutigkeit der DNF*
Die kanonische DNF ist bis auf die Reihenfolge der Terme eindeutig. Das oben beschriebene Träger-Verfahren zur Bestimmung einer DNF liefert immer die kanonische DNF.

Die DNF in obigem Beispiel ist kanonisch. Ein weiterer Begriff wird im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet:

Definition 4 *orthogonale DNF*
Eine DNF heißt orthogonal, wenn alle konjunktiven Terme paarweise mit „and“ verknüpft den Wert „false“ ergeben (man sagt auch disjunkt sind).

Eine othogonale DNF ist nicht eindeutig, aber die kanonische DNF ist immer orthogonal. Vielfach gibt es aber einfachere Terme für eine orthogonale DNF.

4 Boolsche Ausdrücke und Wahrscheinlichkeiten

Wie kann uns nun die Aussagenlogik bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten helfen? Nehmen wir an, wir haben n unabhängige Ereignisse $E_i, i = 1 \ldots n$ mit bekannten Wahrscheinlichkeiten $P(E_i)$. $f(x_1, \ldots, x_n)$ sei eine Funktion logischer Variablen, die mit and, or und not gebildet wurde. Durch Einsetzen der E_i an Stelle der x_i erhält man ein neues Ereignis $E = f(E_1, \ldots, E_n)$. Wie berechnet man nun P(E)?
Um die beiden Rechenregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung für disjunkte (unverträgliche) Ereignisse und für unabhängige Ereignisse [1] anwenden zu können, muss der Ausdruck F logisch äquivalent umgeformt werden, sodass er eine orthogonale DNF darstellt. Dann kann man durch Anwenden der beiden Rechenregeln $P(E)$ direkt berechnen.
Ein einfaches Beispiel wurde bereits im Text vorgestellt. Dort wurde auch der Zusammenhang zu Wahrscheinlichkeitsbäumen für die die beiden Rechenregeln ebenfalls gelten, dargestellt.

[1] Für disjunkte F_i gilt:$P(F_1, \ldots, F_k) = \sum_{i=1}^{k} P(F_i)$
Für unabhängige Ereignisse F_i gilt: $P(F_1, \ldots, F_k) = \prod_{i=1}^{k} P(F_i)$