Allgemein ist die Wahrscheinlichkeit, bei Permutationen der Länge n (n gerade) *keinen* Zyklus der Länge größer als $\frac{n}{2}$ zu erhalten, gleich

$$1-(\frac{1}{\frac{n}{2}+1}+\frac{1}{\frac{n}{2}+2}+\frac{1}{\frac{n}{2}+3}+...+\frac{1}{n})=1-\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Zur Herleitung dieser Formel ist etwas kombinatorisches Grundwissen hilfreich; ich gehe schrittweise an die Sache heran.

1. Schritt

   Die „Abzählende Kombinatorik“ kennt 6 Grundaufgaben (siehe hierzu z.B. Wikipedia „abzählende Kombinatorik“), nämlich Permutationen, Variationen und Kombinationen jeweils mit und ohne Wiederholung. Wir benötigen hier die Aussagen über Permutationen der Länge n (ohne Wiederholung), von den es n! viele gibt. Außerdem brauchen wir Aussagen über Variationen der Länge k aus n Elementen (ohne Wiederholung), von denen es $\frac{n!}{(n-k)!}$ viele gibt.

   Doch jetzt zu unserer eigentlichen Aufgabenstellung.

2. Schritt

   Wir erinnern uns, dass es höchstens einen Zyklus der Länge größer n/2 geben kann.
   Zunächst ist die Frage nach der Anzahl der Zyklen der Länge k einer Permutation der Länge n zu klären.
   Diese Fragestellung entspricht (bis auf eine kleine Modifikation) einer Variation ohne Wiederholung: Es sind aus n Zahlen jeweils Variationen der Länge k zu bilden (bei denen es auf die Reihenfolge der Zahlen ankommt). Dies sieht aus wie ein Zyklus der Länge k, ist auch so, allerdings haben Zyklen die Eigenschaft, dass bei zyklischer Vertauschung der Elemente wieder der gleiche Zyklus herauskommt, d.h., (3, 4, 6) ist beispielsweise nicht gleich (4, 3, 6) aber sehr wohl gleich zu (6, 3, 4) und auch zu (4, 6, 3). Allgemein ausgedrückt: bei einem Zyklus der Länge k sind alle durch Verschieben (im Sinne eines Ringspeichers) entstehenden Zyklen gleich, dies sind aber gerade k viele.

   Fassen wir beide Tatsachen zusammen, so ergibt sich:

   - Anzahl der Variationen der Länge k aus n Elementen $\frac{n!}{(n-k)!}$

- Jede k-te Variation ist logisch gleich, also 1/k - fach weniger unterschiedliche Variationen

Insgesamt: Die Anzahl der Zyklen der Länge k bei n-elementiger Permutation ist

$$\frac{n!}{k(n-k)!}$$

3. Schritt

   Unser Zyklus der Länge $k > \frac{n}{2}$ ist in eine Permutation der Länge n eingebettet, d.h. es bleiben ausser ihm noch n - k Stellen, die unterschiedliche Permutationen (bei gleichem k-Zyklus) ergeben können. Dies sind aber gerade (n - k)! viele, denn man kann die restlichen n - k Stellen wie eine Permutation dieser Länge auffassen. Multiplizieren wir also dieses Ergebnis mit dem aus Schritt 2. Somit gibt es

   $$\frac{n!}{k}$$

   viele Permutationen mit einem Zyklus $k > \frac{n}{2}$.

4. Schritt

   Da k die Werte $\frac{n}{2} + 1$ bis n annehmen kann, denn wir müssen ja alle Zyklenlängen $k > \frac{n}{2}$ berücksichtigen, addieren sich nun die Einzelhäufigkeiten aus Schritt 3 zu:

   $$n! \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{1}{k}$$

   Damit ist nun endlich die Anzahl der Zyklen der Länge k einer Permutation der Länge n berechnet und der letzte Schritt führt uns über die Grunddefinition der Wahrscheinlichkeit zum gewünschten Ergebnis.

5. Schritt

   Anzahl der „günstigen" Fälle (aus Schritt 4) geteilt durch Anzahl der „möglichen" Fälle (n! = Gesamtanzahl der Permutationen der Länge n) ergibt die Wahrscheinlichkeit, einen Zyklus länger als $\frac{n}{2}$ zu erhalten.

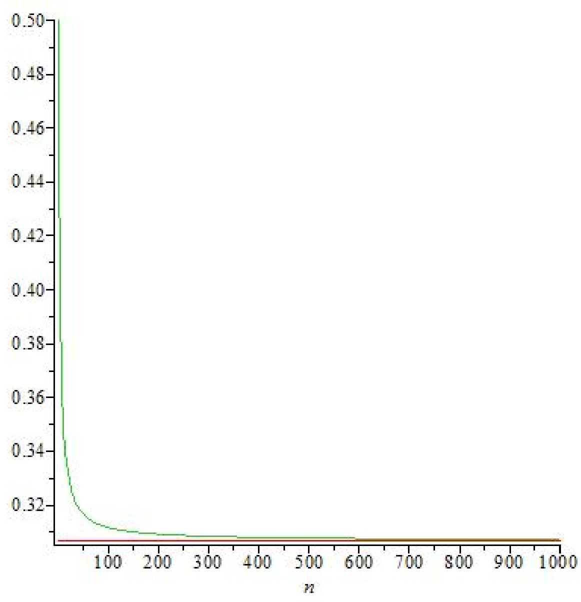
Von 1 subtrahiert ergibt die Wahrscheinlichkeit für das Gegenteil und damit das gewünschte Ergebnis:

$$1 - \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{1}{k}$$

Puh, das wäre geschafft!

Für das Ergebnis unserer Aufgabe setzt man n = 100 und berechnet den bereits angegebenen Wert von $0,31182782069\ldots$. Das ist auch die Stelle, an der die ganze Geschichte fragwürdig wird: der (oder die) Mathematiker unter den Gefangenen werden nie in der Lage gewesen sein, diese Summe ohne Hilfsmittel (Taschenrechner etc.) zu berechnen; denn welcher Mathematiker kann schon rechnen? Aber auch dafür habe ich eine Lösung:

Man betrachte obige von n abhängige Wahrscheinlichkeitsfunktion
$1 - \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{1}{k}$.
In der folgenden Grafik stellt die grüne Kurve die Wahrscheinlichkeitsfunktion dar, die rote waagerechte Asymptote liegt auf Höhe von 1 - ln(2).



Für immer größer werdendes n nähert sich diese Kurve der Zahl 1 - ln(2) an, was $0,306852819\ldots$ ergibt. Mit anderen Worten: auch für 1000, 10000 und mehr Gefangene ist die Strategie gut anwendbar.